A
MESSIEURS
DE
L'ACADEMIE
ROYALE.

MESSIEURS,

Mon deſſein n'eſt pas ſeulemen
de vous dédier cét Ouvrage, comme à
de puiſſans Protecteurs ; mais c'eſt d
vous le preſenter comme à des Juge
Souverains. Il eſt vray qu'en Franc
nous n'avons pas de cette ſorte d
judicature que l'on voit à la Chine
où une Cour composée de ſçavan

BIBLIOTECA NAZ
ROMA
VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Mathematiciens, juge en dernier reſſort de tout ce qui regarde les Mathematiques, qui ſont en ce païs-là une des plus importantes affaires de l'Eſtat. Si les loix du Royaume ne nous ont point donné cette juriſdiction, vous l'avez, MESSIEURS, *par vôtre propre merite; & à conſiderer les perſonnes qui compoſent voſtre Societé, nous pouvons dire que ce n'eſt pas ſeulement une aſſemblée de ce qu'il y a de plus habiles hommes en Europe; mais que c'eſt une Cour ſouveraine, dont les jugemens peuvent paſſer pour autant d'Arreſts parmi les ſçavans. Que peut-on dire, quand on voit ce grand édifice qui s'éleve avec tant de magnificence, ſinon que c'eſt un Palais qu'on baſtit pour un nouveau Tribunal, & que le Roy qui ſurpaſſe les Empereurs Chinois dans la ſtructure de ce baſtiment, veut peut-eſtre*

imiter leur politique dans l'érection de cette nouvelle Compagnie? Vous ſçavez, MESSIEURS, *que le Tribunal des Mathematiques de la Chine ſe tient ordinairement dans deux Obſervatoires, qui ſont tout auprés des deux Villes Imperiales. Ceux qui nous en ont fait la deſcription, nous diſent qu'on ne voit rien en Europe de comparable, ſoit pour la magnificence du lieu, ſoit pour la grandeur des machines de bronze qui ſont faites depuis ſept cens ans, & qui eſtant exposées depuis pluſieurs ſiécles ſur les plate-formes de ces grandes tours, ſont encore auſſi entieres & auſſi nettes que ſi elles ne faiſoient que de ſortir de la fonte. Les diviſions en ſont tres-exactes, la diſpoſition tres-propre à obſerver, tout l'ouvrage tres-délicat: en un mot il ſembloit que la Chine inſultoit à toutes les autres*

Digitized by Google

nations, comme ſi avec toute leur ſcience & avec toutes leurs richeſſes elles ne pouvoient produire rien de ſemblable. Il faloit un Roy comme le noſtre pour réparer l'honneur de l'Europe; & il faloit des perſonnes comme vous, MESSIEURS, *pour employer ſi à propos la magnificence d'un ſi grand Prince, & pour faire connoiſtre à toute la terre que la France, ſous la conduite de nos Miniſtres, ſçait porter les choſes au-delà de tout ce que peuvent entreprendre toutes les autres nations du monde. Ce ne ſont pas ſeulement les murailles de ce ſuperbe édifice qui me font parler de la ſorte: ceux qui aiment les lettres auront encore plus de ſujet de benir le gouvernement preſent, quand on verra exécuter ces grands deſſeins que vous m'avez fait l'honneur de me communiquer. Et certainement*

Digitized by Google

l'application avec laquelle vous vous occupez continuellement à faire des experiences de Physique, à polir les Arts, à enrichir les Mathematiques de vos nouvelles découvertes, feront voir bientost que jamais les Arts & ces belles Sciences n'ont esté au point de perfection où vous les allez mettre. Je ne compte pas icy les desseins particuliers que plusieurs de vous ont bien avancez touchant l'Architecture, les Cartes de Geographie, la connoissance des Plantes, l'Anatomie, le Mouvement, l'Optique & l'Astronomie. Je ne compte pas non plus cette belle Observation qui va paroistre en public touchant la grandeur de la Terre. A juger par l'excellence des instrumens dont l'Auteur s'est servi par son industrie à les manier, par la justesse de toutes ses operations, & par la connoissance parfaite qu'il

de la Geometrie, on eſt déja tres-perſuadé que ce doit eſtre un ouvrage accompli. Tout cela, MESSIEURS, *& pluſieurs autres choſes que je paſſe, font voir que vous eſtes en effet nos Juges, & que vous avez droit de prononcer ſur nos Sciences. Agréez donc cét aveu public que je fais; & puiſque l'integrité des Juges les plus ſeveres ne nous empeſche pas de les ſolliciter quelquefois, ſouffrez qu'en vous preſentant cét Ouvrage, je vous le recommande, & que pour vous porter à le traiter favorablement, je vous aſſeûre qu'il vient d'une perſonne qui a pour vous tout le reſpect imaginable. C'eſt,*

MESSIEURS,

Voſtre tres-humble & tres-obéïſſant ſerviteur, PARDIES.

Digitized by Google

PREFACE.

CEux qui compareront la petiteſſe de cét Ouvrage avec la grandeur de n titre, ſeront peut-eſtre d'abord rebuz par la diſproportion qui paroiſt entre un & l'autre ; & il y a ſujet de craindre u'ils ne prennent toutes ces promeſſes ſi xtraordinaires, que pour des expreſſions op hardies d'une perſonne qui s'engage ſément à faire ce qu'elle ne ſçauroit exécuter. Mais je les ſupplie de vouloir un peu ſuſpendre leur jugement, & de conſiderer u'on ne donne icy que la moitié de ces remens, & que des ſeize livres qu'ils doivent contenir, on n'en publie maintenant ue neuf, parce que les autres expliquant qu'il y de plus profond & de plus revé dans les inventions extraordinaires de Geométrie, ne ſont pas ſi neceſſaires à ux qui veulent commencer à apprendre tte Science. Cependant, dans ces premiers livres, on ne laiſſe pas de traiter ce u'il y a de beau dans les quinze livres Euclide, & outre cela, ce qu'Archimede démontré de la quadrature du cercle, les unes d'Hippocrate, les Logarithmes, les

Sinus, & quelques autres choſes de cette nature. On y verra les propriétez merveilleuſes des nombres qu'Euclide a démontrées dans le ſeptiéme, le huitiéme & le neuviéme de ſes Elemens. On y apprendra la démonſtration des *Grandeurs incommenſurables*, qui eſt peut-eſtre l'effort le plus grand dont l'eſprit humain ſoit capable, puiſqu'allant fouïller juſques dans la poſſibilité des choſes, il découvre avec tant de clarté ce qui eſt & ce qui n'eſt pas ; & que dans la multitude infinie des comparaiſons qu'il regarde toutes comme poſſibles entre deux grandeurs, il démontre avec une aſſeûrance inébranlable, que Dieu meſme n'en voit pas une capable de fournir une commune meſure de ces deux grandeurs. Mais ſi cette démonſtration eſt belle, il faut avoûër qu'elle eſt bien difficile : ceux à qui nous avons l'obligation d'une ſi grande découverte, ne nous ont point montré d'autre route que celle qu'ils ont tenuë eux-meſmes, ſoit qu'en effet ils n'en ayent point connu d'autre, ſoit qu'ils ayent voulu par là nous faire experimenter une partie de leur peine, & nous faire gouſter en meſme temps avec d'autant plus de plaiſir les délices de ce nouveau monde, que nous aurons eû plus de peine à y parvenir. Quoy qu'il en ſoit, ce chemin eſt ſi long & ſi plein de difficultez, qu'il ſe trouve fort

Digitized by Google

eu de perſonnes qui ayent ou aſſez de conſ-
ınce pour en ſupporter l'ennuy, ou aſſez de
›rce pour en ſurmonter la fatigue. Je ne
:ay ſi j'oſeray dire que j'ay eſté aſſez heu-
:ux pour découvrir une nouvelle route. Ce
e ſeroit pas une fort grande loûange pour
ıoy : un matelot aventurier eſt quelquefois
lus heureux à faire quelque nouvelle dé-
›uverte, que le plus ſage Pilote ; & le ha-
ard fait trouver meſme dans la tempeſte,
: qu'on n'auroit ſceû découvrir avec toute
ı connoiſſance que l'on pourroit avoir de la
Marine. Il ſe pourroit faire auſſi que cou-
ant comme j'ay fait ces vaſtes mers de la
ieometrie, le hazard m'auroit fait rencon-
ter une route nouvelle & inconnuë aux
rands hommes qui m'ont précedé. Je ne
rétens pas néanmoins m'attribuër cette
›onne fortune ; mais je puis bien dire du
ıoins que la route que je tiens pour aller
ux Incommenſurables eſt tres-courte &
res-aiſée, & que pour peu d'attention que
'on veuïlle apporter à la lecture de quatre
›u cinq petites pages, on comprendra par-
aitement une choſe que tres-peu de per-
›onnes, meſme de ceux qui ſe meſlent de
Geométrie, ſont capables d'entendre.

Aprés cela je traite de diverſes ſortes de
›rogreſſions, & j'inſiſte particulierement
ur les deux plus celebres, qui ſont la Geo-
nétrique & l'Arithmetique ; & les compa-

rant l'une avec l'autre, je traite des Logarithmes, & j'en fais voir l'artifice par le moyen d'une ligne geométrique, qui sera tres-utile pour la résolution des Problêmes d'Algebre de toutes sortes de dimensions. C'est cette ligne avec laquelle j'ay quarré autrefois l'Hyperbole; & ce qu'un de mes amis m'a fait voir depuis peu dans le sçavant Journal d'Angleterre, touchant ce qui a esté publié sur cette matiere par de tres-sçavans Geométres, ne m'a point surpris, & mesme cela m'a fait penser que ces Messieurs n'avoient pas voulu nous communiquer tout ce qu'on pourroit dire sur ce sujet. Je finis cette premiere partie par la pratique de la Geométrie; ce qui devroit faire le dernier livre de tous ces Elemens. Outre les operations les plus faciles & les plus communes, j'y donne les principes pour mesurer les grandeurs & les distances des lieux inaccessibles, pour faire la carte d'une Place ou d'une Province; pour trouver les sinus, les tangentes, & les secantes de tous les angles; & enfin pour avoir la connoissance de tout ce qui appartient à cette partie, que l'on appelle la Geométrie pratique.

Aprés cela je donneray dans tout autant de livres, l'Algebre, les Sections Coniques, les Spheriques, & la Statique; mais sur tout j'établiray cinq ou six regles gé-

nérales, desquelles ensuite, comme par des corollaires, on tire la démonstration d'une infinité de propositions qui passent pour grandes dans la Geométrie. C'est là qu'on trouvera la nature & la mesure des espaces asymptotiques, dont la connoissance est la chose du monde la plus admirable, & qui fait voir le plus clairement la grandeur & la spiritualité de nostre ame, puisque par la seule lumiere de son esprit, penetrant au-delà de l'infini, elle découvre si clairement des choses, que nulle experience sensible ne luy peut apprendre, & qu'aucune puissance corporelle ne sçauroit seulement appercevoir. Ces espaces sont d'une étenduë actuellement infinie, compris entre deux lignes, qui estant prolongées à l'infini, ne se rencontrent jamais; d'où leur vient leur nom d'Asymptotes. Cependant on démontre que ces éspaces infinis en longueur, sont néanmoins égaux à un cercle ou à une autre figure déterminée: de sorte que l'Infini mesme, tout immense & tout innombrable qu'il est, se réduit néanmoins au calcul & à la mesure de la Geometrie, & que nostre esprit encore plus grand que luy, est capable de le comprendre. De toutes les connoissances naturelles que l'homme peut aquerir par son propre raisonnement, sans doute la plus admirable est

cette comprehenſion de l'infini : & je ne voy rien de plus propre à nous convaincre de l'exiſtence de noſtre ame, & à nous faire reconnoiſtre, qu'outre la faculté materielle que nous avons d'imaginer par le moyen des organes, nous en avons une toute ſpirituelle pour penſer & pour raiſonner, que le plus grand de tous les Philoſophes appelle *une puiſſance indépendante des organes, ſeparée de la matiere, & venant d'ailleurs que du corps.* En effet, quelque effort que nous faſſions pour imaginer l'infini, nous n'en viendrons jamais à bout ; & tandis que nous nous en tiendrons à la ſeule imagination, nous pourrons bien nous figurer une eſpace d'une vaſte étenduë, mais il ſera toûjours borné : parce que l'imagination eſtant, à proprement parler, une puiſſance corporelle, qui ne nous repreſente rien que par des fantoſmes & par des images ſenſibles, doit eſtre elle-meſme, comme le corps, bornée dans ſes repreſentations. Et comme un tableau ne ſçauroit repreſenter à nos yeux une étenduë actuellement infinie, à cauſe que ce qui eſt borné dans un certain eſpace ne peut contenir ce qui n'a point de bornes ; auſſi l'imagination n'eſtant qu'un tableau qui nous repreſente des images à la verité bien ſubtiles, mais toûjours materielles, ne ſçauroit nous faire voir que des choſes

corporelles & limitées, toute l'immenſité de l'infini ne pouvant eſtre contenuë dans les bornes d'une peinture corporelle. L'imagination ne peut donc atteindre juſques là, que de nous repreſenter l'infini. Mais d'ailleurs la démonſtration que nous faiſons de la nature & des propriétez de cette immenſe & infinie étenduë aſymptotique, nous convainc également que nous avons dans nous une faculté capable de nous repreſenter cette étenduë infinie. Car comme afin de meſurer avec la regle & le compas une figure repreſentée ſur du papier, il faut que j'aye cette figure preſente à mes yeux & à ma main, afin qu'appliquant l'inſtrument à ſes angles & à ſes coſtez, je puiſſe en prendre toutes les dimenſions, & en déterminer ainſi la grandeur; de meſme, afin que par la regle de ma raiſon je prenne les meſures de cét eſpace aſymptotique, il faut que j'en aye une idée intimement preſente à mon eſprit, & que ce meſme eſprit s'appliquant, pour ainſi dire, à cette idée & à cette figure interieure, il en prenne les dimenſions, en détermine la grandeur, & en démontre toutes les propriétez. Il faut donc reconnoiſtre que nous avons en nous des idées & des repreſentations claires & diſtinctes d'une étenduë infinie; & que par conſequent cette faculté qui nous repreſente ainſi ce que nul corps ne peut repre-

ſenter, eſt une puiſſance purement ſpirituelle & diſtincte de la matiére : de ſorte que la Geométrie, par une ſeule démonſtration, prouve également une des plus admirables propriétez de la nature, & en meſme temps une des deux plus importantes veritez de la Morale.

Oſeray-je paſſer encore plus avant, & dire que dans cette meſme démonſtration on trouve auſſi la preuve invincible de l'exiſtence de Dieu ? Je ſçay que la nature divine eſt un abyſme de lumiére, qui ſe répand par tout, & qui ſe fait ſentir aux eſprits les plus aveugles & les plus ſtupides : mais je ſçay auſſi juſqu'à quel point eſt allée l'impiété des libertins, qui ne pouvant réſiſter à leurs propres convictions, ni ſe répondre à eux-meſmes, taſchent d'éluder au dehors les démonſtrations des autres, en ſe retranchant dans l'embarras de l'éternité ; & ils penſent eſtre fort à couvert dans cette multitude infinie de cauſes dépendantes, & trouver toûjours lieu de fuir dans la ſuite éternelle de diverſes productions. Mais la Geométrie, par un exemple manifeſte des aſymptotes, démontre invinciblement, que meſme dans cette prétenduë ſuite des cauſes ſubordonnées & dépendantes les unes des autres à l'infini, il faut neceſſairement en venir à une premiére nature, qui concourant avec toutes

ces cauſes particuliéres, & correſpondant à tous les temps, ſoit elle-meſme infinie & éternelle, & qui ne produiſant toute ſeule aucune de ces cauſes ſans le concours & ſans la détermination des autres, ſoit néanmoins la cauſe générale qui produit & qui conſerve toutes choſes.

Peut-eſtre, aprés tout, qu'on penſera que je mets icy les choſes en abregé ſeulement, & que cette Geométrie pourra bien ſervir de memoires à ceux qui ſçauront déja cette ſcience, mais non pas d'inſtruction à ceux qui la veulent apprendre. Je déclare que cela eſt bien éloigné de mon intention, qui n'a jamais eſté de faire un abregé: j'ay toûjours prétendu faire une Geométrie qui puſt ſervir à ceux qui commencent, & où ceux meſme qui n'ont jamais oüi parler de Mathematiques, puiſſent apprendre en fort peu de temps, non ſeulement ce qui eſt le plus neceſſaire dans la Geométrie, mais encore ce qu'il y a de plus relevé. Je ſçay qu'en cette matiere les livres les plus courts ne ſont pas toûjours les plus clairs; & parmi le grand nombre de ceux qui ont voulu nous faciliter la lecture & l'intelligence d'Euclide, pluſieurs en ont bien amoindri le volume; mais tous n'ont pas pour cela accourci le temps qu'il faut pour le comprendre. Entre tous les Commentateurs, le plus long, à mon avis, eſt

Digitized by Google

Clavius, & le Pere Fournier eſt le plus court ; je ſuis néanmoins perſuadé qu'il faut plus de temps pour entendre paſſablement Euclide dans le Pere Fournier, que pour le comprendre dans Clavius : tant il eſt vray que dans la Geométrie on ne doit pas meſurer le temps de l'étude par la grandeur ou la petiteſſe du volume. Ainſi dans le deſſein que j'ay eû de donner le moyen d'apprendre cette Science avec le plus de facilité qu'il me ſeroit poſſible, je ne me ſuis pas tant étudié à eſtre court dans les écrits, qu'à me rendre intelligible dans la façon de proceder ; & ſi ce volume paroiſt fort petit, cela ne vient pas tant de la briéveté des démonſtrations particulieres, que de la facilité de la methode générale. Car il faut remarquer qu'une des choſes qui rendent difficile & ennuyeuſe la lecture d'Euclide & des Auteurs ordinaires, c'eſt que dans l'exactitude rigoureuſe qu'ils ont de ne laiſſer paſſer ſans démonſtration rien de ce qui ſe peut démontrer, pour facile qu'il paroiſſe d'ailleurs ; il arrive ſouvent que ce qui euſt eſté clair, ſi on ſe fuſt contenté de le propoſer à l'eſprit, tel qu'il paroiſt naturellement, devient difficile & embaraſſé, lors qu'on veut le réduire à une démonſtration réguliere. De plus, il ſe trouve ſouvent, que pour démontrer une propoſition im-

Digitized by Google

portante, Euclide employe une tres-grande ſuite de propoſitions, qui ne ſervent proprement à rien, qu'à prouver cette principale propoſition. Si donc par la ſeule expoſition on vient à faire appercevoir la verité, ſans ſe mettre en peine de démontrer ce de quoy on eſt pleinement convaincu, & ſans employer des diſcours qui ne ſemblent ſervir qu'à nous faire deſapprendre ce que nous ne ſçaurions ignorer, on s'épargnera bien de la peine. De meſme, ſi l'on peut tout d'un coup démontrer ces propoſitions capitales & importantes d'Euclide, ſans employer cette longue ſuite de démonſtrations, & ſans tant de préparatifs, on aura ſans doute le moyen de retrancher bien des choſes inutiles : c'eſt ce que je penſe avoir fait en pluſieurs endroits, démontrant dans une ſeule propoſition ce qui n'eſt ordinairement prouvé que par cette ſuite ennuyeuſe d'autres propoſitions. Un autre moyen d'abreger, dont je me ſuis ſervi, c'eſt de réduire les choſes ſous de certains principes généraux ; ce que j'ay fait non ſeulement dans ce livre, où par cinq ou ſix regles univerſelles je démontre une infinité de grandes propoſitions, mais auſſi en beaucoup d'autres endroits, comme lors que traitant des Sections Coniques, je démontre les proprietez des quatre par quelqu'une des pro-

priétez qui eſt particuliere à une ſeule ſection. Par exemple, les conſiderant toutes ſous les proprietez de l'Ellipſe, je dis que le Cercle eſt une ellipſe, dont les deux foyers ſe touchent; que la Parabole eſt une ellipſe, dont les deux foyers ſont infiniment éloignez l'un de l'autre; & que l'Hyperbole eſt une ellipſe, dont les foyers ſont plus qu'infiniment éloignez : ce qui a un fort bon ſens, comme je l'explique en cét endroit.

Quelqu'un ſans doute trouvera mauvais que j'aye laiſſé la methode ordinaire de ranger les définitions, les principes & les propoſitions; & il croira peut-eſtre que je fais tort à la Geométrie, de luy oſter ce qui l'a toûjours fait paſſer pour la Science la plus exacte. Un autre me reprochera que j'ay encore gardé quelques vieilles façons de démontrer, aprés que les modernes, par cette politeſſe ſi propre au temps où nous ſommes, ont donné des démonſtrations bien *plus naturelles*, & ont fait voir la difference qu'il y a entre *éclairer l'eſprit*, & *le convaincre*. On me dira encore que je me ſuis negligé en beaucoup de choſes; que j'ay avancé pluſieurs propoſitions ſans les démontrer; que je cite ſouvent des endroits, qui ne prouvent pas directement ce qui eſt en queſtion; que je me ſers indifferemment de la *Converſe*, & de la

propoſition meſme. A tout cela je répons en un mot, que dans le deſſein que j'avois d'enſeigner la Geométrie avec toute la facilité poſſible, la voye que j'ay ſuivie m'a ſemblé la plus propre : ce qui ne m'empeſchera pas néanmoins de profiter des avis que les perſonnes intelligentes auront la bonté de me donner.

Cependant je m'apperçois, que faiſant profeſſion d'eſtre fort court dans cét Ouvrage, je ſuis exceſſivement long dans la Préface. Ainſi je ne m'arreſte pas à faire voir les grands avantages de la Geométrie : je dis ſeulement, que ſi jamais elle a eſté de quelque utilité dans l'étude des Sciences naturelles, & dans la pratique des Arts, elle eſt maintenant de la derniere neceſſité pour l'un & pour l'autre. On ſçait à quel point on a porté dans noſtre ſiecle la perfection des Arts, & avec quelle penétration l'on va approfondir les matieres les plus cachées de la Phyſique. De la façon qu'on s'y prend aujourd'huy, la Geométrie eſt neceſſaire auſſi-bien que la Méchanique, qui n'eſt qu'une Geométrie appliquée au mouvement local, & ceux qui ont maintenant plus de vogue, ſont inintelligibles, ſi l'on n'a ces deux connoiſſances. Pour ce qui eſt de la Méchanique, j'en ay donné une partie des Elemens dans un diſcours du Mouvement local,

Digitized by Google

que je ne dois pas avoir honte d'avoüer pour mien ; & j'eſpere qu'avec ce que je publie maintenant dans ce livre de Geométrie, on aura deux grands moyens d'entendre la Phyſique de ce temps, & d'en bien juger : & peut-eſtre trouvera-t-on que ceux qui ont la réputation d'avoir établi leur Philoſophie ſur les fondemens de la Geométrie & des Méchaniques, ne ſont pas toûjours inébranlables ; & que cela meſme qui a ſervi à faire valoir leur doctrine, ſervira à faire connoiſtre leurs erreurs. Je veux encore avertir le lecteur que je ne prétens nullement vouloir paſſer pour Auteur de ce que je donne dans cét Ouvrage ; j'ay pris de tous coſtez ce qui m'a agréé : & ſi quelqu'un y trouve quelque choſe qu'il penſe eſtre de ſon invention, ou de quelque autre, qu'il le prenne hardiment, & qu'il l'attribuë à ſon Auteur, j'y conſens volontiers, & je ne les luy conteſteray point. Que ſi par hazard il y rencontre quelque choſe qui ne ſe trouve point ailleurs, & qu'il veüille me l'attribuër, alors je le reconnoiſtray pour mien, de peur qu'il ne ſoit à perſonne.

Digitized by Google

AVIS A CEUX QUI VEULENT APPRENDRE LA GEOMETRIE.

IL faut s'accouſtumer à conſiderer les figures en meſme temps qu'on lit. On y a de la peine au commencement ; mais on y eſt rompu dans deux ou trois jours.

Il ne faut point ſe rebuter, ſi l'on trouve des choſes qu'on ne comprend pas d'abord ; la Geométrie ne s'apprend pas auſſi aiſément qu'une hiſtoire.

Si aprés avoir leû avec attention une propoſition, on ne l'entend pas, il faut paſſer outre ; on l'entendra peut-eſtre dans la ſuite, ou du moins lors qu'aprés avoir tout parcouru, on recommencera à lire tout de nouveau. En fait de Geométrie, on ne comprend jamais bien les choſes à la premiere lecture.

Digitized by Google

Les nombres qui ſe trouvent entre des parentheſes, comme par exemple, (3. 24.) marquent que ce qu'on dit en cét endroit eſt prouvé ailleurs, ſçavoir icy au troiſiéme livre, à l'article vingt-quatriéme; de ſorte que le premier chifre marque le livre, & les autres marquent l'article: & il faut aller conſulter ces articles-là, pour ſçavoir la preuve de ce qu'on lit.

Quand on trouve des mots qu'on n'entend pas, il faut conſulter la table qui eſt à la fin.

Il eſt bon d'avoir un Maiſtre au commencement qui explique ces démonſtrations, & par ce moyen on apprend beaucoup plus aiſément qu'on ne feroit de ſoy-meſme en liſant.

Digitized by Google

ELEMENS DE GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des Lignes, & des Angles.

1. PAR le nom de *Quantité* nous entendons une choſe, qui eſtant comparée à une autre de meſme nature, peut eſtre appellée plus grande, ou plus petite; égale, ou inégale: comme ſont l'Etenduë, le Nombre, la Peſanteur, le Temps, le Mouvement; & toutes ces choſes, en tant qu'elles ſe peuvent ainſi comparer, ſuivant le plus ou le moins, ſont l'objet de la Geometrie.

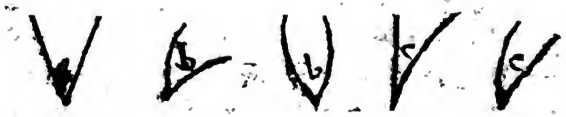
2. On s'arreſte néanmoins à conſiderer particulierement l'Etenduë, comme celle qui peut ſervir d'exemple & de regle à meſurer toutes les autres Quantitez.

3. La quantité, qui a de l'étenduë ſeulement en longueur, ſans aucune profondeur, s'appelle *Ligne:* celle qui eſt étenduë en longueur & en largeur, s'appelle *Surface* ou *Superficie:* celle qui a de la longueur, & de la largeur, & de la profondeur, s'appelle *Corps* ou *Solide.*

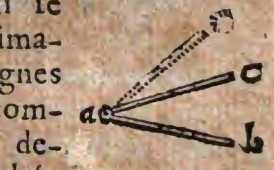
4. Le *Point* eſt un endroit de la Quantité, lequel on conſidere comme s'il n'avoit aucune étenduë, & qu'il fuſt indiviſible de tous coſtez: ainſi les extrémitez, ou le milieu d'une ligne, ſont des Points.

5. Il y a des lignes *Droites,* & des lignes *Courbes:* de meſme il y a des ſurfaces *Planes,* qui s'appellent *des Plans:* & des ſurfaces *Courbes,* qui ſont *Convexes* en dehors, comme le deſſus d'une voute, & *Concaves* en dedans, comme le deſſous d'une voute.

6. Lorſque deux lignes ſe touchent en un point, & vont enſuite en s'éloignant l'une de l'autre, il ſe fait entre ces lignes un *Angle,* qui s'appelle *Rectiligne* quand les deux lignes ſont droites, *a: Curviligne* quand elles ſont courbes, *b:* & *Mixte* quand l'une eſt courbe, & l'autre droite, *c.*



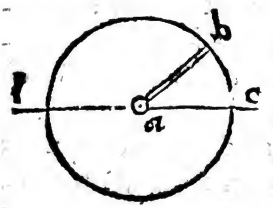
7. L'angle eſt dit eſtre d'autant plus petit, que les lignes qui le font, ſont plus inclinées l'une vers l'autre. Prenez deux lignes *a b* & *a c*, qui ſe touchent en *a* : ſi vous imaginez que ces deux lignes s'ouvrent comme un compas, en ſorte qu'elles demeurent toujours attachées en *a* comme par le clou du compas, tandis que l'extrémité *c* s'écarte de l'extrémité *b* ; alors vous concevrez que plus ces extrémitez s'éloigneront mutuellement, plus auſſi ſe fera grand l'angle qui eſt entre deux : & au contraire, ſi vous approchez davantage ces extrémitez, vous ferez que les lignes ſeront plus inclinées, ou plus panchées l'une vers l'autre, & l'angle en ſera plus petit.



8. Il faut donc bien remarquer que la grandeur des angles ſe meſure, non par la longueur des lignes qui le font, mais par leur inclination. Par exemple, l'angle *b* eſt plus grand que l'angle *a*, quoy-que les lignes de *b* ſoient plus courtes : parce qu'elles ne ſont pas ſi inclinées l'une vers l'autre, que le ſont les lignes de l'angle *a* ; & pour le comprendre, on n'a qu'à s'imaginer que l'an-

gle *b* eſt poſé ſur l'angle *a*, comme on le voit par les lignes ponctuées, qui repreſentent l'angle *b*. Car pour lors on verra que l'angle *b* contiendra aiſément au dedans de ſoy l'angle *a*, & que les lignes d'*a* ſeront bien plus inclinées l'une vers l'autre, que ne le ſont les lignes de *b*; & qu'ainſi enfin l'angle *a* eſt plus petit.

9. L'angle ſe déſigne ordinairement par trois lettres, dont celle du milieu marque le point où les deux lignes ſe touchent, comme en la figure ſuivante, *b a c* marque l'angle fait par les deux lignes *b a* & *c a*, en ſorte que *a* eſt le point commun où les lignes ſe touchent.



10. Si nous imaginons une ligne *a b* attachée par le bout *a* au milieu de la ligne *d c*, & que de plus nous faſſions mouvoir cette ligne autour du point *a*; quand elle ſera revenuë au lieu d'où elle avoit commencé à ſe mouvoir, l'extrémité *b* aura décrit une ligne courbe, qui s'appelle *Cercle*, ou plutoſt *Circonference* de cercle: car, à proprement parler, le *Cercle* eſt tout l'eſpace renfermé dans cette circonference.

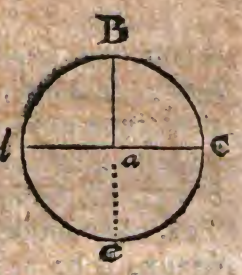
11. Une partie de la circonference s'appelle *Arc*, comme *c b*.

12. La ligne *d c* terminée par la circonference, s'appelle *Diametre*, qui partage le cercle en deux également, ce qui n'a pas besoin de preuve. Aussi toute ligne droite qui sera tirée par le *Centre*, c'est à dire, par le point *a*, partagera le cercle en deux parties égales, & fera aussi un autre diametre.

13. La ligne *a b*, ou *a c*, ou toute autre tirée du centre à la circonference, s'appelle *Rayon*, ou *Demidiametre*.

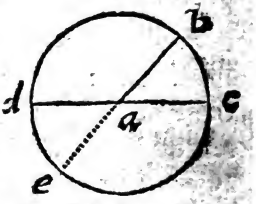
14 Tous les rayons ou demidiametres sont égaux.

15. Quand l'extrémité *B* est également éloignée des deux extrémitez du diametre *e* & *d*, c'est à dire, quand *B* se trouve au milieu de la demi-circonference ; alors cette ligne *B a* fait deux angles, qu'on appelle *Droits*, qui sont égaux de part & d'autre, l'un *B a c*, & l'autre *B a d*. Et si la ligne *B a* est prolongée au-delà vers *e*, elle fera quatre angles droits, & elle fera un nouveau diametre, qui avec le premier partagera le cercle en quatre parties égales.



16. Alors les lignes sont dites *Perpendiculaires* l'une à l'autre, *B a* à *d c*, & *d a* à *B e*.

17. Mais si *b* est plus proche de l'une des extrémitez du diametre que de l'autre ; alors cette ligne est dite *Oblique*, & fait de part & d'autre deux angles inégaux, dont le plus petit s'appelle *Aigu*, *b a c* ; & le plus grand s'appelle *Obtus*, *b a d*. Que si la ligne *b a* est prolongée jusqu'à *e*, elle sera un nouveau diametre, & fera en dessous deux nouveaux angles : de sorte qu'il y aura en tout quatre angles, desquels on appelle *Opposez par la pointe*, les deux qui se touchent seulement de la pointe comme *b a c*, & *e a d*, ou bien *b a d*, & *c a e* : mais ceux qui ont un costé commun, s'appellent *Angles de suite*, comme *d a b*, & *b a c*, ou bien *b a c*, & *c a e*, *&c.*

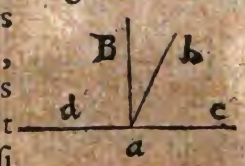


18. Les angles qui prennent des arcs égaux, sont aussi égaux. Comme si l'on prouve que l'arc *c b* est égal à l'arc *e d*, on aura aussi prouvé que l'angle *c a b* est égal à l'angle *e a d*.

19. Ces deux angles qui sont de suite, pris ensemble, sont toûjours égaux à deux droits. Car comme la ligne *d c*, est diametre, & qu'elle coupe le cercle en deux également, les deux arcs *c b* & *b d* pris ensemble, seront égaux à la demi-circonference. Ainsi les deux angles *c a b*

& *b a d* pris enſemble, ſeront égaux à deux droits, puis qu'ils rempliſſent le demi-cercle, comme les deux droits.

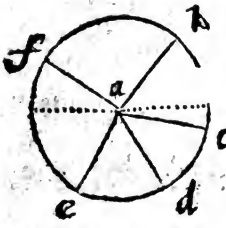
20. Ainſi cette propoſition eſt générale, qu'une ligne droite tombant ſur une autre ligne droite, fait les deux angles de ſuite ou droits, ou égaux à deux droits. Car ſi les lignes ſont perpendiculaires, comme *B a* ſur *d a c*, les angles ſont droits de part & d'autre. (15.) Que ſi la ligne eſt oblique, comme *b a*, ſur la meſme *d c*, alors les angles ſont bien inégaux; mais de tout autant que l'obtus ſurpaſſe un droit, de tout autant auſſi l'aigu eſt ſurpaſſé par un autre droit. Ainſi la petiteſſe de l'un eſt récompenſée par la grandeur de l'autre.



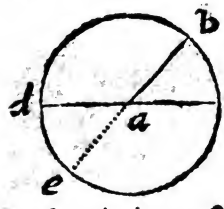
21. Si deux angles qui ont un coſté commun, ſont égaux à deux droits, leurs autres coſtez feront une ligne droite. Soient les angles *d a b* & *b a c* égaux deux droits, je dis que la ligne *a d* avec la ligne *a c* fait une ligne droite; (fig. de l'art. 17.) ce qui eſt clair par ce qui a eſté dit. Car ſi du centre *a* on tire un cercle *d b c*, les deux arcs *d b*, *b c* ſeront égaux à la demi-circonference, puis qu'on ſuppoſe que ces deux angles ſont égaux à deux droits. Ainſi les lignes *d a*, *a c* feront le diame-

te, & par conſequent ſeront *en droite ligne, poſita in directum.*

22 Si d'un point donné *a* on éleve diverſes lignes *ab, ac, af, ad,* &c. elles feront divers angles ; & tous ces angles enſemble, en quelque nombre qu'ils ſoient, ſeront égaux à quatre droits : car il eſt clair que tous ces angles rempliſſent le cercle dont ils diviſent la circonference en autant d'arcs *bf, fe, ed, dc, cb.* Ainſi tous ces arcs enſemble ſont égaux à quatre quarts de cercle, c'eſt à dire, que tous ces angles ſont égaux à quatre droits ; car auſſi quatre angles droits rempliſſent le cercle.



23. Les angles *oppoſez par la pointe* ſont égaux entre eux. Soient deux lignes droites *d ac,* & *b ae,* je dis que l'angle *bac,* eſt égal à l'angle *ead* : car l'arc *cb,* avec l'arc *bd,* fait la demi-circonference, (12.) & de meſme l'arc *bd* avec l'arc *de,* fait auſſi la demi-circonference : Donc l'arc *bc* eſt égal à l'arc *de,* puis que l'arc *bd* fait toûjours la meſme quantité, ſoit qu'on l'ajouſte avec l'arc *bc,* ou avec l'arc *de.* Par meſme raiſon l'angle *dab* eſt égal à l'angle *cae.*

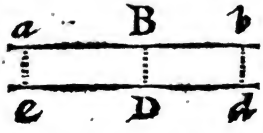


Digitized by Google

24. On diviſe toute la circonference du cercle en 360. parties égales, qui s'appellent *Degrez*, & chaque degré en 60. parties égales, qui ſont les *Minutes*, & chaque minute en 60. *Secondes*, chaque ſeconde en 60. *Tierces*, & ainſi à l'infini. Et quand on veut déterminer la grandeur des angles, on compte les degrez qu'ils comprennent. Par exemple, quand on dit un angle de 90. degrez, on entend un angle droit, parce qu'un angle droit comprend la quatriéme partie de la circonference, laquelle contient 90. degrez, puis que toute la circonference en contient 360. dont la quatriéme partie eſt 90. De meſme un angle de 60. degrez eſt un angle qui fait les deux tiers d'un droit.

25. Les Minutes ſe marquent par un petit trait, comme une virgule qu'on met à coſté du chifre: & les Secondes par deux de ces traits ″: les Tierces par trois ‴: les Quartes par quatre, *&c.* comme 25. d. 32′. 43″. ce qui veut dire 25. degrez, 32. minutes, 43. ſecondes.

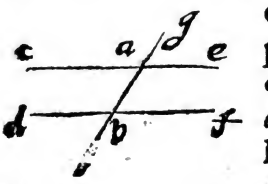
26. Deux lignes ſont dites eſtre *Paralleles*, quand elles ſont par tout également éloignées l'une de l'autre. Les deux lignes *a b* & *e d* ſont pararelles, ſi elles ſont également éloignées en *a e*, & en *b d*, ou en *B D*, & en tout autre endroit.



27. Cét éloignement ſe meſure par des perpendiculaires. Comme ſi du point *a* on s'imagine que la ligne *ae* tombe perpendiculairement ſur *ed*; & ſi de meſme *bd* tombe perpendiculairement ſur *de*: nous concevrons naturellement que ſi ces deux perpendiculaires *ae*, *bd*, ſont égales, les deux lignes *ab*, *ed* ſeront également éloignées l'une de l'autre en ces deux endroits; cela eſt naturellement connu ſans autre preuve.

28. Deux lignes paralleles eſtant continuées à l'infini, ne viennent jamais à ſe toucher: car puis qu'elles ſont toûjours également éloignées, on peut par tout tirer entre deux une perpendiculaire égale à *ae*, ou à *bd*: & par conſequent elles ne ſe touchent jamais.

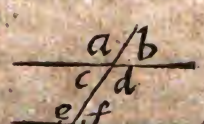
29. Si une ligne coupe deux autres lignes paralleles, elle ſera également inclinée ſur l'une & ſur l'autre: & ſi une ligne coupant deux autres lignes, eſt également inclinée ſur l'une & ſur l'autre;



ces deux lignes ſeront paralleles. Soient les deux lignes paralleles *cae*, *dbf* coupées par la ligne *gabh*: je dis que cette ligne *gabh* eſt inclinée ſur *cae*, de meſme que ſur

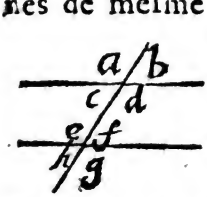
dbf; c'eſt à dire, que l'angle *gae* eſt égal à l'angle *gbf*. Cecy eſt naturellement connu pour peu d'attention qu'on y apporte. Car ſi l'angle *gae*, par exemple, eſtoit plus grand, & que la ligne *ae* fuſt plus écartée d'*ag*, le point *e* de la ligne *ae* pancheroit vers *f*, puis que *bf* ne s'écarteroit pas tant qu'*ae*; ainſi ces deux lignes, *ae*, & *bf* ne ſeroient point paralleles. De plus, ſi nous imaginons ces deux lignes comme les coſtez d'une regle, nous pouvons conſiderer toute cette regle, comme une ligne indiviſible. Ainſi les angles *hbd* & *cag* ſeront comme les *angles de ſuite* égaux à deux droits, (20.) & les angles *hbd* & *gae* ſeront comme les deux angles *oppoſez par la pointe* égaux entre eux. (23.)

30. Lors qu'une ligne coupe deux paralleles, il ſe fait huit angles, dont les quatre *a*, *b*, *h*, *g*, ſont *externes*, les autres ſont *internes*. Les angles *c* & *f*, ou bien *d* & *e*, ſont appellez *Alternes*: les angles *b* & *f*, ou bien *a* & *e*, ſont *alternativement oppoſez*: les angles *d* & *f*, ou bien *c* & *e*, ſont les *internes de meſme coſté*.



31. Les angles alternes, & alternativement oppoſez, ſont égaux entre eux; comme *b*, *f*, *c*, *h*, & *a*, *e*, *d*, *g*, (29.)

32. Lors qu'une ligne tombe ainſi ſur deux paralleles, elle fait les angles internes de meſme coſté égaux à deux droits.



L'angle *d* avec l'angle *f* eſt égal à deux droits, parce que *f* eſt égal à *e*. (31.) Or *e* avec *d* fait deux angles droits: (20.) Donc auſſi *f* avec *d* fera deux angles droits, ce qu'il falloit démontrer.

33. Une propoſition eſt appellée *Converſe* d'une autre, quand aprés avoir tiré une concluſion de quelque choſe qu'on a ſuppoſée, on vient dans cette autre propoſition converſe à ſuppoſer ce qui avoit eſté conclu, & à en tirer ce qui avoit eſté ſuppoſé. Par exemple, icy nous diſons, ſi les lignes ſont paralleles, les angles *d* & *f* ſeront enſemble égaux à deux droits, où nous ſuppoſons que les lignes ſont paralleles; & de là nous concluons: Donc les angles, *&c.* La *Converſe* ſe fera ainſi. Si les angles *internes de meſme coſté d* & *f* ſont égaux à deux droits, les lignes ſeront paralleles: où aprés avoir ſuppoſé que ces angles valent deux droits, nous concluons que les lignes ſeront paralleles.

34. Les *Converſes* en cét endroit ſont veritables, ſçavoir que ſi une ligne coupant deux autres lignes fait les angles alternes égaux, ces deux lignes ſont paralleles.

35. Si deux lignes ſont paralleles à une troiſiéme, elles le ſeront entre elles. Soit la ligne *a b* parallele à *c d*, & *e f* parallele auſſi à la meſme *c d*, je dis que *a b* eſt pararelle à *e f*: car ſi l'on tire une ligne *b d f* qui les coupe toutes trois, l'angle *b* ſera égal à l'angle *d*, (31.) & de meſme l'angle *f* ſera égal à l'angle *d*: (31.) Donc l'angle *b* eſt égal à l'angle *f*, parce que c'eſt un principe, que ſi deux choſes ſont égales à une troiſiéme, elles ſont égales entre elles. Puis donc que l'angle *b* eſt égal à *f*, il s'enſuit que la ligne *a b* eſt parallele à *e f*. (34.)

Digitized by Google

LIVRE SECOND.

Des Triangles.

1. UNE *Figure* eſt un eſpace renfermé de toutes parts. Si les lignes qui la terminent ſont droites, elle s'appelle figure *Rectiligne*; ſi elles ſont courbes, elle s'appelle *Curviligne*; & ſi elles ſont en partie droites, & en partie courbes, la figure s'appelle *Mixte*.

2. Il y a des figures *Planes*, qui ſont ſur une ſurface plane, & des figures *Solides* qui ſont un corps avec trois dimenſions. On parle icy ſeulement des figures planes.

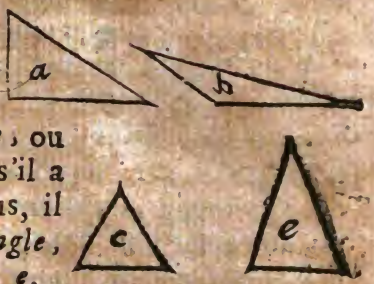
3. Toutes les lignes qui renferment la figure priſes enſemble, font la *Circonference*, ou le *Perimetre*, ou le *Circuit* de la figure.

4. De toutes les figures planes curvilignes, ou mixtes, on ne conſidere proprement dans la Geométrie ordinaire que le cercle, ou une partie de cercle, terminée d'un coſté par un arc, & de l'autre par une ou pluſieurs lignes droites.

5. Parmy les rectilignes, les plus ſimples figures ſont les *Triangles*, qui ſont terminées par trois lignes, leſquelles ſont trois angles.

Digitized by Google

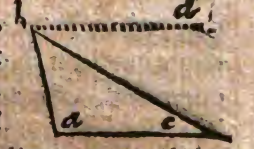
6. Un triangle, qui a un angle droit, s'appelle *Triangle rectangle*, *a*: s'il a un angle obtus, il s'appelle *Obtusangle*, ou *Ambligone*, *b*: s'il a trois angles aigus, il s'appelle *Acutangle*, ou *Oxygone*, *c*, *e*.

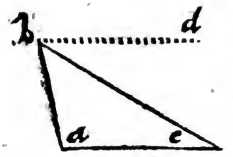


7. Quand le triangle a tous les trois costez inégaux, il s'appelle *Scalene*, *a*, *b*: s'il a deux costez égaux, il est *Isoscele*, *e*: si tous les trois costez sont égaux, il est *Equilateral*, *c*.

8. Si l'on prend deux costez du triangle, on peut les appeller *Iambes*, & le troisiéme costé pour lors s'appellera *Base*. Tout costé peut estre pris pour Base.

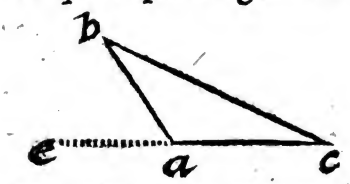
9. En tout triangle les trois angles ensemble sont égaux à deux droits. Soit le triangle *a b c*, je dis que l'angle *a*, plus l'angle *c*, plus l'angle *a b c*, valent deux droits: car si nous imaginons une ligne *b d* parallele à *a c*, ces deux lignes paralleles seront coupées par la troisiéme *b c*, & par consequent les angles alternes seront égaux, c'est à dire, que l'angle *c* est égal à l'angle *c b d*. (1. 31.) De plus, la ligne *b d*



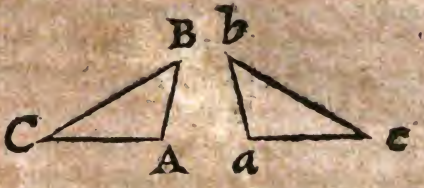


tombant ſur les paralleles *b d* & *a c*, elle fait les angles internes de meſme coſté égaux à deux droits, (1. 32.) c'eſt à dire, que l'angle *a b d*, plus l'angle *a* ſont égaux à deux droits. Or l'angle *a b d* eſt compoſé de deux angles, dont l'un eſt *a b c*, (qui eſt un des trois du triangle) & l'autre eſt *d b c*, que j'ay fait voir eſtre égal à l'angle *c*: Donc auſſi ces trois angles *a b c*, plus *c*, plus *a* valent deux droits; ce qu'il faloit démontrer.

10. Si l'on prolonge la baſe d'un triangle, l'angle externe eſt égal aux deux internes oppoſez. Soit le triangle *a b c*, & qu'on prolonge le coſté *c a* vers *e*, il ſe fait un angle en dehors *b a e*, qui s'appelle l'angle *externe* du triangle. Or je dis que cét angle externe *b a e* eſt égal aux deux angles *b* & *c*, qui ſont les *internes* oppoſez, car ces deux angles *b* & *c* avec le troiſiéme *b a c* ſont enſemble deux droits (par la précedente) & de meſme, ce troiſiéme angle *b a c* avec l'angle *b a e*, fait auſſi deux droits : (1. 20.) Donc les angles *b* & *c* ſont tous deux autant que l'angle *b a e*; ce qu'il faloit démontrer.



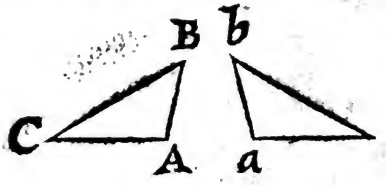
11. Si un triangle *A B C* a deux coſtez *A B* & *A C*, égaux aux deux coſtez *a b*, *a c* d'un autre triangle, & ſi de plus l'angle *A* eſt égal à l'angle *a*: je dis que le troiſiéme coſté *B C* ſera égal à *b c*, & l'angle *B* à l'angle *b*, & *C* à *c*, & tout le triangle *A B C* à tout le triangle *a b c*. Car ſi nous imaginons que le triangle *a b c* ſoit poſé ſur *A B C*, en ſorte que le coſté *a b* ſoit préciſément ſur *A B* qui luy eſt égal, le coſté *a c* tombera auſſi ſur *A C*: puiſqu'on ſuppoſe que l'angle *a* eſt égal à l'angle *A*: & ainſi le point *c* tombera ſur *C*, puiſque *a c* eſt égal à *A C*: Donc auſſi *b c* tombera ſur *B C*, & par conſequent luy ſera égal; & de meſme l'angle *c* ſera égal à *C*, & *b* à *B*, & tout le triangle à tout le triangle, puiſque tout ſe répond ſi bien, que rien du triangle de deſſus ne paſſe au-delà de celuy de deſſous.



12. Les figures qui s'ajuſtent ainſi, & ſe correſpondent parfaitement quand elles ſont miſes l'une ſur l'autre, s'appellent figures *congruës, quæ mutuo ſibi congruunt*; & c'eſt une maxime générale, *Quæ mutuo ſibi congruunt, æqualia ſunt*: les choſes qui

eſtant ainſi miſes l'une ſur l'autre, ſe correſpondent parfaitement, ſont égales.

13. La converſe auſſi de la propoſition précedente eſt veritable; ſçavoir, que ſi un triangle a tous ſes trois coſtez égaux aux trois coſtez d'un autre triangle, tous les angles de l'un ſeront auſſi égaux aux angles de l'autre, & tout l'eſpace que contient un triangle, ſera auſſi égal à l'eſpace que contient l'autre triangle: comme ſi *A B* eſt égal à *a b*, & *A C* à *a c*, & *B C* à *b c*: je dis que l'angle *A* ſera égal à l'angle *a*, & *B* à *b*, & *C* à *c*, & tout le triangle *A B C* à tout le triangle *a b c*; ce qui n'a pas beſoin d'autre preuve.



14. Si l'angle *A* eſt égal à l'angle *a*, & l'angle *B* à l'angle *b*, & le coſté *A B* au coſté *a b*; le coſté *A C* le ſera auſſi au coſté *a c*, & *B C* à *b c*, & tout le triangle *A B C* à tout le triangle *a b c*: cela eſt aiſé à prouver par les précedentes.

15. En tout triangle Iſoſcele, les deux angles qui ſe font ſur la baſe par les jambes égales, ſont égaux entre eux. Soit le triangle *a b c*, dont la

jambe *a b* ſoit égale à *a c*, je dis que l'angle *b* eſt égal à l'angle *c*: car ſi nous imaginons que la baſe *b c* eſt partagée également en *d*, la ligne *a d* fera deux triangles *a d c* & *a d b*, & les trois coſtez de l'un ſeront égaux aux trois coſtez de l'autre; car *a c* eſt égal à *a b* par l'hypotheſe ou ſuppoſition de la propoſition meſme; *d c* eſt égal à *d b*, parce que nous ſuppoſons icy que la baſe *b c* eſt partagée également en *d*. Le troiſiéme coſté *a d* eſt commun à tous les deux triangles: ainſi les trois coſtez de l'un ſont égaux aux trois coſtez de l'autre, & par conſequent tout le triangle *a d c* eſt égal à tout le triangle *a d b*, & l'angle *c* à l'angle *b*; (2.13.) ce qu'il faloit démontrer.

16. Dans tout triangle Iſoſcele, la ligne qui tombant de l'angle du ſommet partage la baſe en deux également, eſt perpendiculaire à la meſme baſe, & diviſe l'angle du ſommet auſſi en deux également: car l'angle *a d c* eſt égal à l'angle *a b d* par la précedente: & par conſequent ils ſont tous deux droits, & la ligne *a d* perpendiculaire ſur *b c*, (1. 15.) & de meſme l'angle *d a c* eſt égal à l'angle *d a b* par la précedente.

17. En tout triangle le plus grand coſté *ſoûtent* ou *ſoûtient* (*ſubtendit*) le plus grand angle, c'eſt à dire, eſt oppoſé au

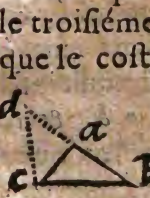
plus grand angle. Soit le coſté *b c* plus grand que le coſté *a c*, je dis que l'angle *a* ſouſtenu par le coſté *b c* eſt plus grand que l'angle *b* ſouſtenu par le coſté *a c* : car puiſque *b c* eſt plus grand que *c a*, ſoit imaginée *c d* égale à *c a*, afin que *a d c* ſoit un triangle Iſoſcele : donc (2. 15.) l'angle *c a d* ſera égal à l'angle *c d a*. Or l'angle *c a b* eſt plus grand que l'angle *c a d* : comme *(le tout eſt plus grand que ſa partie)* Donc l'angle *c a b* eſt plus grand que l'angle *c d a*. De plus, cét angle *c d a* eſtant *externe* à l'égard du petit triangle *d a b*, cét angle, dis-je, *c d a* ſera plus grand que le ſeul interne *b* : (2. 10.) Donc, à plus forte raiſon, l'angle *c a b* ſera plus grand que l'angle *b* ; ce qu'il faloit prouver.

18. Tout triangle doit avoir neceſſairement deux angles aigus : car s'il n'en avoit qu'un, les deux autres ſeroient ou deux obtus, ou deux droits, ou l'un obtus, & l'autre droit. Or rien de tout cela ne peut eſtre, puiſque (2. 9.) tous les trois angles enſemble ne valent que deux droits.

19. De toutes les lignes qu'on puiſſe tirer d'un point donné à une ligne donnée, la plus courte eſt la perpendiculaire, & les plus longues ſont celles qui s'éloi-

gnent le plus de la perpendiculaire. Soit donnée la ligne *a d*, & le point donné *b*; soit de plus *b a* perpendiculaire à *d a*, de laquelle *b e* soit plus éloignée que ne l'est *b c*: je dis que *b a* est plus courte que toute autre ligne possible, par exemple, plus courte que *b c*; & davantage, que *b e* est plus longue que *b c*. Car dans le triangle *a b c* l'angle *a* est droit, & par consequent le plus grand de tous, puisque les deux autres doivent necessairement estre aigus: (2. 18.) Donc le costé *b c* est plus grand que *b a*, (2. 17.) comme soustenant le plus grand angle. De mesme dans le triangle *b c e* l'angle *b c e* est obtus, puisque l'angle *b c a* est aigu, & par consequent le costé *b e* sera plus grand que *b c*, (2. 17.) comme soûtenant le plus grand angle.

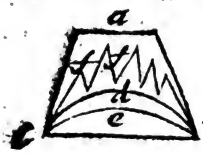
2o. En tout triangle deux costez pris ensemble sont plus longs que le troisiéme. Soit le triangle *a b c*, je dis que le costé *a b*, plus *a c*, est plus long que le seul *c b*: car soit prolongé *b a*, & qu'on imagine *a d* égal à *a c*, le triangle *a d c* sera Isoscelle, & par consequent l'angle *a c d* sera égal à l'angle *d*: (2. 15.) Donc l'angle *d c b*, qui est plus grand



BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

que l'angle *d c a*, eſt auſſi plus grand que l'angle *d*: Donc en conſiderant comme un ſeul triangle *b d c*, le coſté *b d* ſera plus grand que *c b*, (2.17.) comme ſouſtenant un plus grand angle. Or *b d* eſt égal aux deux *b a*, *a c*, puiſque *a d* eſt égal à *a c*: Donc les deux *b a*, *a c*, ſont plus grands que *b c*; ce qu'il faloit prouver.

21. Quoy-que cette propoſition ſoit démontrée, elle peut néanmoins paſſer pour un principe naturellement connu. Car la ligne *c b* eſtant une ligne droite, elle fait auſſi le plus court chemin depuis le point *c* juſqu'au point *b*, tandis que



les autres *c a b*, ou bien *c d b*, ou *c e b*, prennent des détours, & par conſequent des chemins plus longs. Et meſme on peut avec Archimede poſer pour principe, que des lignes qui ſont ainſi des circuits, celles-là ſont plus longues, qui dans leur circuit renferment les autres, & qu'ainſi *c d b* eſt plus longue que *c e b*, & *c a b* que *c d b*; pourveû néanmoins que ces lignes ne rentrent point comme en cette figure, où les lignes *e f f b* peuvent eſtre plus longues que *c a b*, quoy-quelles ſoient renfermées dans le circuit de *c a b*.

Digitized by Google

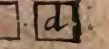
LIVRE TROISIE'ME.

Des Quadrilateres, & des Polygones.

LEs figures compriſes entre quatre lignes droites, qui ſont quatre angles, ſont appellées *Quadrilateres*.

2. Quand les lignes oppoſées ſont paralleles, le Quadrilatere s'appelle *Parallelogramme*, *a*; ſinon il s'appelle ſimplement *Trapeze*, *b*.

3. Quand le parallelogramme a tous les quatre angles droits, il s'appelle *Parallelogramme Rectangle*, *c*, ou, pour abreger, ſimplement *Rectangle*: & ſi de plus tous les coſtez ſont égaux, il s'appelle *Quarré*, *d*.



4. Si tous les coſtez eſtant égaux, les angles néanmoins ne le ſont pas; alors le parallelogramme s'appelle *Rombe*, ou *Loſange*.

5. Si le parallelogramme n'a ni les angles, ni les coſtez égaux, il s'appelle *Rhomboïde*, *a*.

6. Et en tout parallelogramme les angles oppoſez ſont égaux. Soit le parallelo-

gramme *o b c d*, je dis que l'angle *o* eſt égal à l'angle *c*: car l'angle *o* eſt égal à l'angle exterieur *b*, (1. 31.) & *b* eſt égal a *c*: (1. 31.) donc *o* eſt égal à *c*.

7. La ligne tirée d'un angle à l'autre angle oppoſée, s'appelle *Diagonale* ou *Diametre*, comme *b d*.

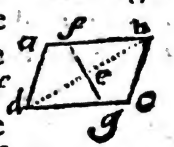
8. Tout parallelogramme eſt diviſé en deux parties égales par la diagonale. La diagonale *b d* diviſe le parallelogramme *o b c d* en deux triangles *o b d* & *b c d*. Il faut donc prouver que ces deux triangles ſont égaux. 1. L'angle *o* eſt égal à l'angle *c*. (3. 6.) 2. L'angle *o b d* eſt égal à l'angle *c d b*; (1. 31.) & par meſme raiſon auſſi l'angle *o d b* eſt égal à l'angle *c b d*. Ainſi ces deux triangles ont tous les trois angles égaux réciproquement, chaque angle de l'un à chaque angle de l'autre: & de plus, le coſté *b d* eſt commun à l'un & à l'autre triangle: Donc auſſi tout le triangle *o b d* eſt égal à tout le triangle *c d b*. (2. 14.)

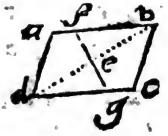
9. En tout parallelogramme les coſtez oppoſez ſont égaux, puiſque le triangle *o b d* eſt tout égal à tout le triangle *d o b*, par la précedente: auſſi le coſté *o d* ſera égal au coſté *b o*, & le coſté *o d* au coſté *b c*; ce qu'il faloit prouver.

10. Deux diagonales *a c* & *b d* ſe coupent

pent mutuellement par le milieu *e* : car dans les triangles *a e d* & *b e c*, le coſté *a d* eſt égal au coſté *c b* : (3. 9.) l'angle *e a d* eſt égal à l'angle *e c b*, (1.31.) & de meſme l'angle *a d e* eſt égal à l'angle *c b e* ; (1. 31.) & de plus l'angle *a e d* eſt égal à l'angle *c e b*, (1. 23.) puiſqu'il luy eſt oppoſé par la pointe : Donc le coſté *d e* eſt égal au coſté *b e*, & le coſté *a e* au coſté *c e*. (2. 14.) Ainſi ces deux Diagonales ſont diviſées également en *e*.

11. Toute ligne droite *f g*, qui paſſe par le milieu de la diagonale *e*, partage le parallelogramme en deux également. Il faut prouver que le trapeze, c'eſt à dire, le quadrilatere irrégulier, *a f g d a* eſt égal au trapeze *c g f b c*. 1. Le triangle *b e f* eſt égal au triangle *d e g* : car le coſté *d e* eſt égal à *e b* par l'hypotheſe ; l'angle d'*f* eſt égal à l'angle de *g* ; (1.31.) l'angle en *e* eſt égal de part & d'autre, puiſqu'il eſt oppoſé par la pointe, *&c.* Donc le triangle *f e b* eſt égal au triangle *g e d*. (2. 14.) 2. Tout le triangle *a d b* eſt égal au tout *c b d* : (3. 8.) Donc, ſi du triangle *a d b* on oſte le petit triangle *f e b*, & qu'en récompenſe on luy donne le trian-





gle *d e g*, il ſe fera un trapeze *a f g d* égal au triangle *a d b*, c'eſt à dire, à la moitié de tout le parallelogramme ; ce qu'il faloit prouver.

12. Si dans la diagonale *b d* on prend un point *e*, par lequel paſſent deux paralleles aux coſtez, ſçavoir *g e f*, & *h e i*; il ſe fera quatre parallelogrammes, ſçavoir *e f b i*, *e h d g*; (& ces deux s'appellent *Parallelogrammes d'autour du diametre*) & les deux autres parallelogrammes ſont *e h a f*, & *e i c g*, & ces deux s'appellent *Complemens*: & les deux complemens avec un parallelogramme d'autour du diametre font la figure qu'on appelle *Gnomon* ou *Eſquierre*, comme eſt icy ce qui eſt haché ou marqué par des traits.

13. En tout parallelogramme les *Complemens* ſont égaux. Il faut prouver que *e h a f* eſt égal à *e g c i*. Tout le triangle *b a d* eſt égal au tout *b d c*: (3. 8.) de meſme le triangle *e f b* eſt égal au triangle *e b i*, (3. 8.) & auſſi *e h d* eſt égal à *e g d*: (3. 8.) Donc ſi des deux triangles égaux *b d a* & *b d c*, on oſte choſes égales, à ſçavoir, ſi on oſte d'une part *e f b*, & *e h d*, & de l'autre *e i b*, & *e g d*, il reſtera d'u-

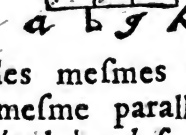
ne part le parallelogramme *e h a f* égal au parallelogramme *e i c g*, qui reſtera de l'autre part ; ce qu'il faloit prouver.

14. Les parallelogrammes qui ont une meſme baſe, & qui ſont entre les meſmes paralleles, ſont égaux. Soit un parallelogramme *a b d c*, & un autre *a b f e*. en ſorte que la baſe *a b* ſoit commune à tous les deux, & que la ligne *c d* eſtant continuée, paſſe par *e f* ; ſi-bien que ces deux parallelogrammes ſoient ainſi entre deux paralleles, & terminez par elles, à ſçavoir, entre la ligne *a b*, & la ligne *c f*, parallele à *a b* : je dis que le parallelogramme *a b d c* eſt égal à *a b f e*.

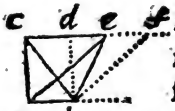
1. *c d* eſt égale à *e f*, puiſque l'une & l'autre ſont égales à *a b* : (3. 9.) Donc ſi à chacune de ces deux lignes égales nous ajouſtons la ligne *d e* ; *c e* ſera égale à *d f*. 2. *c a* eſt égal à *d b*. (3. 9.) 3. L'angle *a c e* eſt égal à l'angle *b d f* : (1. 31.) Donc tout le triangle *a e c* eſt égal au tout *b f d*. Donc ſi de chacun de ces deux triangles égaux, on oſte le triangle blanc *d e o* qui eſt entre les deux parallelogrammes, & qu'on leur ajouſte auſſi à chacun le triangle contrehaché, *o a b* ; il réſul-

tera de tout cela d'une part le parallelogramme *a b d c* égal au parallelogramme *a e f b*, qui ſera fait de l'autre part.

15. Les parallelogrammes qui ſont entre les meſmes paralleles *a b* & *c f*, & ſur des baſes égales, l'un ſur *a b*, & l'autre ſur *g h*, en ſorte que *a b* ſoit égal à *g h*, ſont égaux. Car ſi l'on imagine un troiſiéme parallelogramme *a e f b*, celuy-cy ſera égal à *a b d c*. (3. 14.) puiſqu'il eſt ſur la meſme baſe *a b*, & entre les meſmes paralleles *a b* & *c f*: & ce meſme parallelogramme *a e f b* eſt auſſi égal à *g h f e*, puiſque l'un & l'autre ont meſme baſe, ſçavoir *e f*, (il n'importe de rien que la baſe ſoit au haut ou au bas) & qu'ils ſont entre les meſmes paralleles, ſçavoir entre *f e* & *h a*. Donc auſſi *h f e g* eſt égal à *a b d c*, puiſqu'ils ſont égaux à un troiſiéme *a e f b*.



16. Les triangles qui ſont ſur meſme baſe *a b*, & entre meſmes paralleles *a b* & *c e*, ſont égaux. Le triangle *a b c* eſt égal au triangle *a e b*, parce que ſi l'on imagine une ligne *b d* parallele à *a c*, & une autre *b f* parallele à *a e*,



on aura deux parallelogrammes *a c d b*, & *a e f b*, leſquels eſtant ſur meſme baſe *a b*, & entre meſmes paralleles, ſeront égaux. (3. 14.) Or le triangle *a c b* eſt la moitié du parallelogramme *a c d b*, & le triangle *a e b* eſt la moitié du parallelogramme *a e f b*: (3. 8.) Donc ces deux triangles ſont égaux.

17. Les triangles ſur baſes égales, & entre meſmes paralleles, ſont égaux. La preuve en eſt aiſée.

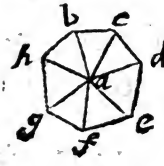
18. Si un triangle a meſme baſe avec un parallelogramme, & eſt entre meſmes paralleles, il ſera la moitié de ce parallelogramme. Le triangle *a b c* eſt la moitié du parallelogramme *a e f b*.

19. Le *Pentagone* eſt une figure à cinq coſtez, & cinq angles. Si tous les coſtez ſont égaux, & tous les angles auſſi; le Pentagone eſt *Régulier*.

20. L'*Hexagone* eſt de ſix coſtez, & de ſix angles; l'*Heptagone* de ſept; l'*Octogone* de huit, *&c.* qui ſont auſſi *Réguliers*, quand tous les angles & tous les coſtez ſont égaux entre eux.

21. *Polygone* eſt généralement toute figure, qui eſt compriſe ſous pluſieurs coſtez, & fait pluſieurs angles: mais on ne ſe ſert gueres de ce nom, ſi les figures n'ont plus de quatre, ou de cinq coſtez.

22. Tout polygone ſe peut diviſer en autant de triangles qu'il a de coſtez. Si au dedans du polygone on prend un point *a* en quelque part que ce ſoit, & que de ce point on imagine des lignes tirées vers chaque angle *ab, ac, ad, &c.* il ſe fera autant de triangles, qu'il y a de coſtez dans le polygone.



23. Les angles des polygones ſont tous enſemble deux fois autant d'angles droits, moins quatre, qu'il y a de coſtez. Par exemple, ſi le polygone a ſept coſtez, dont le double eſt 14. & ſi en oſtant quatre, il reſte dix : je dis que tous les angles de cét heptagone, ſçavoir l'angle *c b h*, plus *b h g*, plus *h g f*, *&c.* ſont tous enſemble égaux à ces dix angles droits. Car ſi du point *a* on tire vers les angles ſept lignes *a b*, *a c*, *a d*, *&c.* pour faire les ſept triangles, chacun de ces triangles aura trois angles, qui en valent deux droits : (2. 9.) de ſorte que tous les angles enſemble de tous ces ſept triangles valent 14. droits. Or chacun de ces triangles a un angle, qui va aboutir au point *a* ; en ſorte qu'eſtant tous poſez autour de ce point *a*, ils rempliſſent tout l'eſpace d'alentour : Donc tous ces angles aboutiſſant ainſi au point *a*, valent 4. droits (1. 22.) & par conſe-

quent tous les autres angles qui ſont vers les angles de l'heptagone, valent dix droits; ce qu'il faloit prouver.

24. Le polygone ſe peut auſſi diviſer en triangles, en tirant des lignes d'angle à angle; alors le nombre des coſtez ſurpaſſera de deux celuy des triangles.

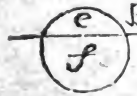
LIVRE QUATRIE'ME.

Du Cercle.

1. UNE ligne eſt dite *Toucher* un cercle, quand elle le touche ſans qu'elle entre dedans, quoy-qu'elle ſoit prolongée au-delà du point *a* d'attouchement. La ligne *a* touche

icy le cercle *c*, comme auſſi le cercle *c* touche le cercle *d*: mais en *b* la ligne entre dans le cercle, & le coupe.

2. Une ligne entrant dans un cercle, le coupe en deux parts, qu'on appelle *Segmens*. *e* eſt le *petit*



ſegment, & *f* eſt le *grand*; & cette ligne qui coupe, s'appelle *Corde*, & les parties du cercle coupées s'appellent *Arcs*. La corde avec l'arc fait aux deux bouts deux angles mixtes, qu'on appelle *Angles du Segment*, comme *e b f*.

Digitized by Google

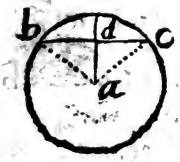
3. Si dans l'arc du ſegment *a c b* on prend un point *c* en quelque part que ce ſoit, & que l'on imagine deux lignes *c a*, *c b*; elles feront un angle *a c b*, qui s'appelle l'*angle dans le ſegment*: & on dit que cét angle *a c b inſiſte* ſur l'arc de l'autre ſegment d'embas.

4. *Secteur* du cercle eſt un triangle mixte compris entre deux demi-diametres *a b*, *a c*, & un arc du cercle *b c*. Le ſecteur eſt icy marqué par des traits.

5. Si par l'extrémité d'un demi-diametre *a b*, on imagine une perpendiculaire *b d*, elle touchera le cercle en ce ſeul point *b*; & tout autre point imaginable de la ligne *b d* ſera hors le cercle. Par exemple, le point *d* eſt dehors; car ſi on imagine une ligne tirée du centre *a d*, laquelle coupe le cercle au point *c*, cette ligne *a d* ſera plus longue que *a b*, (2. 19.) & par conſequent plus longue que *a c*, puiſque *a c* eſt égale à *a b*: (1. 14.) Donc le point *d* tombe au-delà du cercle. Ce qu'il faloit démontrer.

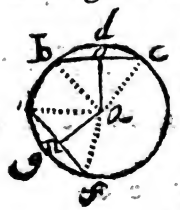
6. Une corde *b c* eſt diviſée en deux

également par une perpendiculaire *a d*, tirée du centre *a* : car le triangle *a b c* eſt iſoſcele, puiſque *a b* eſt égal à *a c* : (1. 14.) donc la perpendiculaire *a d* coupe la baſe *b c* en deux également. (2. 16.) L'arc *b c* eſt auſſi diviſé également.



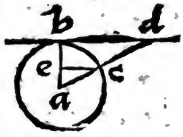
7. Si deux lignes *d b* & *d c* touchent un cercle, elles ſeront égales. Car imaginant du centre vers les points d'attouchement deux lignes *a b* & *a c*, celles-cy ſeront perpendiculaires aux touchantes. (4. 5.) De plus, ſi on imagine la ligne *b c*, l'angle *a b c* ſera égal à l'angle *a c b* : (2. 15.) donc ſi de choſes égales, c'eſt-à-dire, des angles droits *a b d* & *a c d*, on oſte les choſes égales, c'eſt-à-dire, l'angle *a b c*, d'une part, & de l'autre l'angle *a c b*, les angles qui reſteront ſeront égaux, c'eſt-à-dire, *c b d* ſera égal à *b c d*, & par conſequent le coſté *d b* ſera égal au coſté *d c*. (2. 15.)

8. Deux cordes égales *b c*, *e f*, font deux ſegmens *b d c* & *e g f* égaux, & les perpendiculaires *a o* & *a n* ſeront égales. Cecy eſt facile à prouver.

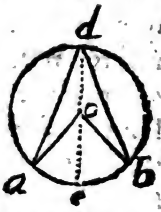


Digitized by Google

9. Soit le demi-diametre *a b*, la perpendiculaire *b d*, une autre ligne *a c d* coupant le cercle en *c*, & la perpendiculaire en *d*, une autre ligne *e e* perpendiculaire au rayon *a b*: toutes ces lignes ont des noms affectez. La ligne *b d* terminée ainſi par *a d*, s'appelle *Tangente* de l'arc *b c*, par exemple de 30. degrez; la ligne *a d* s'appelle *Secante* du meſme arc de 30. degrez; la ligne *e e* s'appelle le *Sinus* du meſme arc; & enfin *a b*, s'appelle le *Sinus-total*, ou ſimplement le rayon.

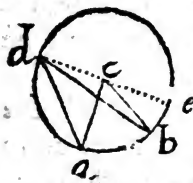


10. Si dans une circonference d'un cercle on prend deux points *a* & *b*, deſquels on tire deux lignes juſques au centre *c*, & deux autres juſques à un autre point *d* de la circonference; il ſe fait deux angles, dont l'un *a c b* s'appelle *Angle au centre*, & l'autre *a d b*, *Angle à la circonference*.



11. L'angle au centre *a c b* eſt toûjours double de l'angle à la circonference *a d b*. 1. Si l'une des lignes, comme *b d*, paſſe par le centre *c*, l'angle *a c b* ſera externe à l'égard du triangle *a c d*:

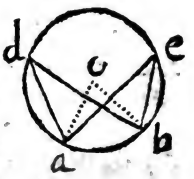
(2. 10.) & par conſequent il ſera égal aux deux angles internes oppoſez, ſçavoir à l'angle *a d c*, plus à l'angle *d a c*: (2. 10.) Or ces deux angles *a d c* & *d a c* ſont égaux (2. 15.) puiſque les deux jambes *c a* & *c d* ſont égales: (1. 14.) Donc l'angle *a c b* eſt double d'un de ces deux, ſçavoir de *a d c*; ce qu'il faloit prouver. 2. Si aucune des lignes *a d* ou *e b d*, ne paſſe par le centre *c*; ſoit imaginé *d c e*, en ſorte que *e* ſe trouve hors l'arc *a b*: alors tout l'angle *a c e* ſera double de l'angle *a d e*, par ce que je viens de montrer dans la premiere partie de cette propoſition; & de meſme l'angle *b c e* eſt double de l'angle *b d e*: Donc ſi de l'angle *a c e* on oſte *b c e*, & que l'angle *a d e*, (qui eſt la moitié de *a c e*) on oſte *b d e*, (qui eſt auſſi la moitié de *b c e*) ce qui reſtera *a d b* ſera la moitié de *a c b*: parce que c'eſt une maxime, que ſi une quantité eſt double d'une autre, & qu'on oſte de la grande le double de ce qu'on oſte de la petite, ce qui reſtera de la grande ſera encore double de ce qui reſtera de la petite. 3. Si le



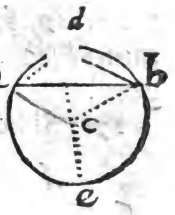
Digitized by Google

point *e* tombe dans l'arc *a b*, alors l'angle *a c e* ſera double de l'angle *a d e*: & l'angle *b c e* ſera auſſi double de *b d e*, par ce qui a eſté démontré dans la premiere partie de cette propoſition : Donc l'angle total *a c b* eſt double de *a d b*.

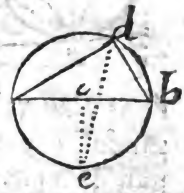
12. Tous les angles qui inſiſtent ſur un meſme arc *a b* ſont égaux, en quelque part de la circonference que leur pointe aboutiſſe. L'angle *a e b* eſt égal à l'angle *a e b*, parce que l'un & l'autre eſt la moitié de l'angle *a c b*, qui ſe feroit au centre *c*. (4. 11)



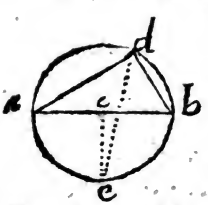
13. L'angle au centre *a c e*, inſiſtant ſur la moitié de l'arc *a b*, ſur lequel inſiſte un autre angle à la circonference *a d b*, eſt égal à ce meſme angle de la circonference. (4. 11.)

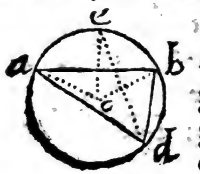


14. L'angle *a d b*, qui inſiſte ſur la demi-circonference, eſt droit; car ſi *e* partage en deux la demi-circonference *a e b*, l'angle *a c e* ſera égal à l'angle *a d b* par la précedente. Or *a c e* eſt droit: (1. 15.) Donc auſſi *a d b* eſt droit.



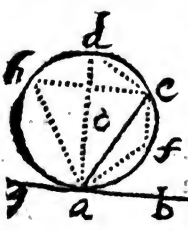
15. L'angle *a d b*, dans le petit ſegment, eſt obtus, parce que l'arc *a e b* eſtant plus de la moitié de la circonference, l'arc *b e*, qui eſt la moitié de l'arc *a e b*, aura plus de 90. degrez. Ainſi l'angle *a d b*, qui eſt égal à l'angle *b c e*, (4. 13.) ſera de plus de 90. degrez; c'eſt-à-dire, il ſera obtus.





16. L'angle *a d b* dans le grand ſegment eſt aigu: car il eſt égal à l'angle *a c e*. Or l'arc *a e b* eſtant moindre que la demi-circonference, l'arc *a e*, qui eſt la moitié de *a e b*, aura moins de 90. degrez.

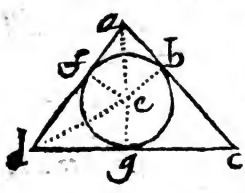
17. Si une droite *g a b* touche le cercle à un point *a*, & qu'une autre ligne *a e* coupe le meſme cercle, l'angle *b a e* ſera égal à l'angle dans le ſegment oppoſé *a h e*: & l'angle *e a g* ſera égal à l'angle dans l'autre ſegment *a f e*. Car ſoit imaginée la perpendiculaire *a d*, qui paſſera par le centre *e*, (4. 5.) l'angle *a e d* ſera droit: (4. 14.) & par conſequent, puiſque les trois angles d'un



triangle ſont égaux à deux droits, (2. 9.) l'angle *e a d* avec l'angle *a d e* fera un droit. Or ce meſme angle *e a d* avec *e a b* fait auſſi un droit, puiſque *a d* eſt perpendiculaire à *a b*: Donc l'angle *e a b* eſt égal à l'angle *a d e*, & par conſequent à tout autre angle qui inſiſtera ſur le meſme arc *a e*, & qui aboutira à quelque autre point de la circonference, comme à l'angle *e h*, puiſque tous ces angles ſont égaux entre eux; (4. 12.) & c'eſt la premiere partie de cette propoſition. Maintenant il faut prouver que l'angle *e a g*, eſt égal à l'angle *a f e*; ce qui eſt l'autre partie. Dans le triangle *a e f*, l'angle *a f e* avec *f a e* & *f e a*, eſt égal à deux droits. (2. 9.) Or l'angle *f e a* eſt égal à *f a b*, par ce qui vient d'eſtre prouvé dans la premiere partie de cette propoſition, car la ligne *f a* peut eſtre conſiderée comme coupant le cercle & la tangente *b a*, auquel cas l'angle *f a b* doit eſtre égal à tout autre angle qui ſeroit fait dans le ſegment oppoſé *f d h a*. Or l'angle *f e a* eſt fait dans ce ſegment, parce qu'il inſiſte ſur l'arc *f a*, & que ſa pointe *e* aboutit à un point de la circonference *f e d h a*, ainſi cét angle *f e a*, eſt égal à l'angle *f a b*. Donc les deux angles

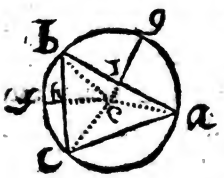
e a f & *f a b*, avec *a f e*, ſont égaux à deux droits. Mais les meſmes *e a f* & *f a b*, avec *e a g* ſont auſſi égaux à deux droits : (1. 20.) Donc l'angle *e a g* eſt égal à l'angle *e f a*; ce qu'il faloit prouver.

18. Une figure rectiligne eſt dite *circonſcrite* à un cercle, quand tous les coſtez de cette figure touchent le cercle ſans le couper. Le triangle *a c d* eſt circonſcrit au cercle *b g f*, parce que chaque coſté de ce triangle touche le cercle en *b*, en *g*, & en *f*.



19. Une figure eſt *inſcrite* au cercle, quand tous les angles aboutiſſent à la circonference, comme le triangle *a b c* de la figure ſuivante.

20. Tout triangle *a b c* peut eſtre inſcrit dans un cercle : car ſi l'on imagine deux lignes *e i*, & *e b* qui coupent parpendiculairement, & par le milieu les coſtez *a b* & *b c*, on pourra tirer un cercle du point *e* comme du centre par le point *b*. Or je dis que ce cercle paſſera par les points *a* & *c* : car 1. les deux trian-



gle *e i b* & *e i a* seront tous égaux, puisque le costé *i b* est égal au costé *i a* par l'hypothese, le costé *e i* est commun, l'angle vers *i* est droit de part & d'autre: Donc (2. 11.) le costé *e b* est égal au costé *e a*. 2. Par mesme raison on prouvera que le costé *e c* est égal à *e b*: & par consequent le cercle, dont le centre seroit *e*, & le demi-diametre *e b*, passeroit par *a* & par *c*.

21. Tout triangle *a c d* (fg. de l'art. 18.) peut estre circonscrit à un cercle. Car si l'on imagine deux lignes *a e*, & *d e*, qui divisent en deux également les angles *a* & *d*; & puis des perpendiculaires sur les costez du triangle, sçavoir *e b*, *e f*, *e g*: je dis que si on tire un cercle du centre *e* par *b*, ce cercle touchera les trois costez du triangle aux points *b*, *f*, *g*. Car 1. les deux triangles *a e b*, *a e f* sont tout égaux: car ils ont un costé *a e* commun, un angle vers *b* & *f* droit, un autre angle vers *a* égal, puisque l'angle *b a f* a esté divisé en deux également: Donc le costé *e b* est égal au costé *e f*. (2. 14.) 2. Par mesme raison on prouvera que *e g* est égal à *e f*. Et comme d'ailleurs ces lignes *e b*, *e f*, *e g* sont perpendiculaires sur les costez du triangle, le cercle

b f g touchera ces coſtez en ces points. (4. 5.)

22. Tout quadrilarere *a f e d* inſcrit dans un cercle, a les angles oppoſez égaux enſemble à deux droits. Car ſi par le point *a* on tire une tangente *g a b*, & une diagonale *a e*, l'angle *a f e* ſera égal à l'angle *e a g*, (4. 17.) & l'angle *a d e* à l'angle *e a b*: (4. 17.) & par conſequent, puis que les deux *f e a b* & *e a g* ſont égaux à deux droits, ces deux angles oppoſez *f* & *d* ſont auſſi égaux à deux droits. De meſme maniere on prouvera que les angles *f e d*, & *f a d* ſeront égaux à deux droits, ſi l'on imagine une autre tangente par le point *f*.

23. La converſe de cette propoſition eſt auſſi manifeſte; ſçavoir, que tout quadrilatere, dont les angles oppoſez ſont égaux à deux droits, eſt inſcrit dans un cercle; c'eſt à dire, qu'il peut y avoir un cercle qui touche tous ſes quatre angles.

24. Tout polygone circonſcrit à un cercle eſt égal à un triangle rectangle, dont une jambe ſeroit égale au demi-diametre du cercle, & l'autre à toute la circonference du polygone. Soit

la ligne F A égale au demi-diametre *f h*, & la perpendiculaire infinie A B C D, *&c.* ſur laquelle ſoit priſe A *h* égale à *a h*, & *h* B égale à *h b*, & B *i* égale à *b i*, & *i* C égale à *i c*, *&c.*

afin que toute la ligne *A B C D E A* ſoit égale à toute la circonference du polygone *a b c d e a*. De plus ſoit F *F F* parallele à A B, afin que toutes les perpendiculaires *h F*, *i F*, *k F*, *&c.* ſoient égales au demi-diametre *f h* ou *f i*, *&c.* il eſt clair que le triangle *A F B* ſera égal au triangle *a f b*, & le triangle *B F C* au triangle *b f c*, & *C F D* à *c f d*, *&c.* Ainſi tous ces triangles enſemble ſeront égaux à tout le polygone. Or le triangle F A A eſt égal à tous ces triangles enſemble, à cauſe qu'en tirant les lignes *B* F, *C* F, *D* F, *&c.* Le triangle F A *B* ſera égal à *F A B*, & F *B C* à *F B C*, *&c.* (3. 16.) Donc auſſi tout le triangle F A A eſt égal au polygone ; ce qu'il faloit démontrer.

25. Tout polygone régulier eſt égal

à un triangle rectangle, dont une jambe ſeroit toute la circonference du polygone, & l'autre, la perpendiculaire tirée du centre ſur un des coſtez du polygone. La preuve en eſt la meſme que celle de la propoſition précedente. Car toutes les perpendiculaires *f h, f i, f k, &c.* ſont égales, *&c.*

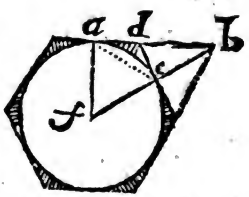
26. Tout polygone circonſcrit eſt plus grand que le cercle, & tout polygone inſcrit eſt plus petit. Cela eſt manifeſte, parce que ce qui contient eſt plus grand que ce qui eſt contenu.

27. *Le perimetre* (ou la circonference) de tout polygone circonſcrit eſt plus grand que la circonference du cercle, & le perimetre de tout polygone inſcrit eſt plus petit : cela eſt auſſi manifeſte par la 21. du ſecond livre.

28. Si dans un petit ſegment de cercle *a b c*, on inſcrit un triangle iſoſcele, en ſorte que *a b* ſoit égal à *b c*; ce triangle ſera plus grand que la moitié du ſegment. Car ſi on tire la tangente *e b d*, qui ſera parallele à *a c*, car elle eſt perpendiculaire à *f b*, (4. 5.) à laquelle l'eſt auſſi *a c*; (4. 6.) & ſi

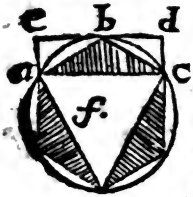
de plus on acheve le parallelogramme rectangle *a e d c*; celuy-cy ſera plus grand que le ſegment du cercle *a b c*. Or le triangle *a b c* eſt la moitié du parallelogramme *a e d c*: (3. 18.) Donc ce triangle *a b c* eſt plus grand que la moitié du ſegment *a b c*.

29. Soit la tangente *a d b*, & la ſecante *f c b*, & la droite *a c*, & une autre tangente *c d*; je dis que le triangle *d b c* eſt plus de la moitié du triangle mixte, compris entre les droites *a b*, *c b*, & la circulaire *c a*: car dans le triangle *d b c* l'angle en *c* eſtant droit, (4. 5.) le coſté *d b* ſera plus grand que *d c*. (2. 17.) Or *d c* eſt égal à *d a*: (4. 7.) Donc *d b* eſt plus grand que *d a*: Donc le triangle *c b d* eſt plus grand que le triangle *c a d*: (3. 17.) Donc il eſt plus grand que la moitié du triangle total *c b a*. Or ce triangle *c b a* eſt plus grand que le triangle mixte compris entre l'arc *a c*, & les droites *b c*, *b a*: Donc auſſi le triangle *d b c* eſt plus grand que la moitié du triangle mixte *a b c*.



30. De ces deux propoſitions il s'enſuit, qu'en multipliant les coſtez des

polygones réguliers, on en peut faire de circonſcrits & d'inſcrits, en ſorte que la difference, dont le circonſcrit ſurpaſſera le cercle, ou dont le cercle ſurpaſſera l'inſcrit, ſoit auſſi petite que l'on voudra; parce que ſi de quelque quantité que ce ſoit, on oſte plus de la moitié, & du *réſidu* encore plus de la moitié, & derechef plus de la moitié encore du réſidu, & ainſi pluſieurs fois, on viendra enfin à laiſſer un réſidu auſſi petit que l'on voudra: ce qui eſt naturellement connu. Ainſi, aprés avoir inſcrit un triangle, qui ſera plus petit que le cercle de trois grands ſegmens, on peut inſcrire un hexagone, qui ſera plus grand que n'eſtoit le triangle; mais qui ſera encore plus petit que le cercle de ſix petits ſegmens qui ſont icy blancs. Or ces ſix petits ſegmens tous enſemble ne contiennent pas tant d'eſpace, que la moitié des trois premiers ſegmens. (4. 28.) Aprés quoy on peut encore inſcrire un dodécagone, qui ſera ſurpaſſé par le cercle de douze petits ſegmens: mais tous ces douze enſemble ne vaudront pas la moitié des ſix ſegmens de l'hexagone; & ainſi on peut, en multipliant les coſtez des polygones,



diminuer tant que l'on voudra la difference dont le cercle surpassera ce polygone inscrit. De mesme, aprés avoir circonscrit un triangle, on peut circonscrire un hexagone, & puis un dodécagone, & une figure de vingt-quatre costez, *&c.*

31. Tout cercle est égal à un triangle rectangle, dont une jambe est le demi-diametre, & l'autre une ligne droite égale à la circonference du cercle. Car ce triangle sera plus grand que tout polygone inscrit, & plus petit que tout polygone circonscrit: (par la 24. 25. 26. & 27. du 4.) Donc il sera égal au cercle. Car s'il estoit plus grand, pour petite qu'en fust la difference, on pourroit faire un polygone circonscrit, dont la difference avec le cercle seroit moindre que la difference du mesme cercle avec ce triangle rectangle: ainsi ce polygone circonscrit seroit plus petit que ce triangle; ce qui est absurde. De mesme, si ce triangle estoit plus petit que le cercle, on pourroit faire un polygone inscrit, qui seroit plus grand que ce triangle; ce qui est impossible.

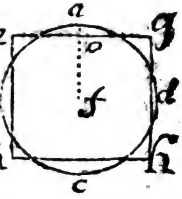
Cette sorte de démonstration que nous venons d'employer, & qu'on appelle de l'impossible, *est une des plus belles inventions de l'antiquité; & toute la Geo-*

métrie des indiviſibles *eſt fondée là-deſſus : de ſorte qu'il y a ſujet de s'étonner, que quelques nouveaux Auteurs l'ayent rejettée comme défectueuſe & indirecte. Que ſi l'on en vient à ce point de délicateſſe, que de ne pouvoir ſouffrir une démonſtration, ſi elle ne prouve directement & poſitivement ; il ſera fort aiſé de donner à celle-cy un tour qui la rende réguliere & directe : car on n'a qu'à poſer pour principe*, que ſi deux quantitez déterminées *a* & *b* ſont telles, que toute autre quantité imaginable, qui ſeroit plus grande ou plus petite que *b*, ſeroit auſſi plus grande ou plus petite que *a*, ces deux quantitez *a* & *b* ſont égales. *Et ce principe poſé, qui eſt en effet tres-manifeſte de ſoy-meſme, on prouvera directement que ce triangle eſt égal au cercle, puiſque toute figure imaginable (inſcrite) plus petite que le cercle, eſt auſſi plus petite que le triangle ; & que toute figure (circonſcrite) plus grande que le cercle, eſt auſſi plus grande que le triangle.*

C'eſt ce qu'on appelle la quadrature du cercle, *qui ne conſiſte qu'à faire un quarré, ou bien un triangle, ou une autre figure rectiligne égale au cercle ; ce qu'on feroit, ſi l'on pouvoit trouver une ligne droite égale à la circonference, comme*

me il paroiſt en cette propoſition ; mais cette égalité n'a jamais eſté trouvée geométriquement.

32. Une ligne eſtant diſpoſée en cercle, tiendra plus d'eſpace qu'en toute autre figure polygone réguliere que ce ſoit. Si la circonference du cercle *a b c d* ſe diſpoſe en quarré, ou en quelque autre polygone régulier, en ſorte que tous les coſtez *e g*, *g h*, *h i*, *i e*, enſemble ſoient égaux à la circonference *a b c d* ; je dis que tout ce cercle ſera plus grand que le polygone. Car le cercle eſt égal au triangle, dont un coſté eſt la circonference, & l'autre coſté eſt le demi-diametre *f a* ; & le polygone eſt égal au triangle, dont un coſté eſt auſſi la meſme circonference *a b c d*, ou les coſtez *e g h i*, & l'autre coſté eſt *f o*, (4. 25.) Et comme *f o* eſt plus petit que *f a*, tout ce ſecond triangle égal au polygone ſera plus petit que le premier triangle égal au cercle : & par conſequent ce polygone ſera plus petit que le cercle ; ce qu'il faloit prouver.



C'eſt ce qu'on entend, quand on dit communément, que de toutes les figures Iſoperimetres, *ou qui ont les circonferences égales, la plus grande eſt le cercle.*

C

LIVRE CINQUIE'ME.

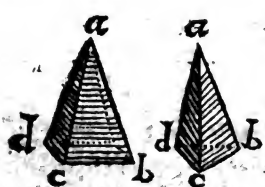
Des Solides.

1. UNE ligne droite eſt dite ſimplement *droite* ſur un plan, ou *érigée* ſur un plan à *angles droits*, lors qu'elle n'eſt point inclinée ſur ce plan plus d'un coſté que d'un autre, comme une colonne ſur le pavé.

2. Deux plans ſont paralleles, quand toutes les perpendiculaires ou droites, tirées entre les deux plans, ſont égales.

3. Un plan eſt perpendiculaire ou *droit* ſur un autre plan, quand il n'eſt pas incliné ou panché plus d'un coſté que d'un autre, comme une muraille ſur le ſol.

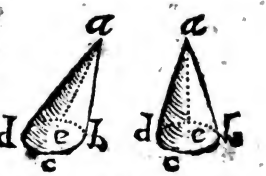
4. *L'angle ſolide* ſe fait, quand trois ou pluſieurs plans ſe joignent en aboutiſſant à un point, comme la pointe d'un diamant bien taillé.



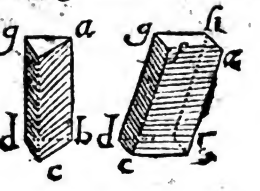
5. Si l'on imagine la ligne *a b* fixe au point *a*, & qu'elle ſoit meûë tout le long des coſtez d'un polygone *b c d*, cette ligne par ce mouvement décrira une figure qui s'appelle *Pyramide*.

6. Le polygone s'appelle la *baſe* de la pyramide.

7. Si la ligne *a b* ſe meut le long d'un cercle *b c d*, elle décrit un *Cone*, dont ce cercle eſt la *baſe*; & la ligne tirée de la pointe *a* au centre du cercle *e* eſt l'*axe*.



8. Si la ligne *a b* ſe meut uniformement autour de deux polygones *b c d*, *a f g*, qui ſoient tout-à-fait égaux, ayant leurs coſtez & leurs angles égaux mutuellement, & que ces polygones ſoient paralleles, en ſorte que les coſtez égaux ſe répondent parallelement, *a f* à *b c*, *f g* à *c d*, *&c.* Alors cette ligne par ſon mouvement fera une figure qui s'appelle *Priſme*; & les polygones en ſont les *baſes*.



9. Si les baſes du priſme ſont des parallelogrammes, il s'appelle *Parallelepipede*.

10. Si la ligne *a b* ſe meut uniformement autour de deux cercles égaux & paralleles, elle décrit un *Cylindre*.

11. La ligne qui joint les centres *e e* des baſes, eſt l'*axe* du Cylindre.

12. Dans toutes ces figures, lors que l'axe eſt perpendiculaire ſur la baſe *d e c*, les figures ſont appellées Iſoſceles ; mais ſi l'axe eſt incliné, elles ſont Scalenes.

13. Si un demi-cercle *a d b* tourne autour de ſon diametre *a b*, il décrit une *Sphere* ou un globe, dont l'*axe* eſt *a b* : le *centre c*, le meſme que celuy du demi-cercle. Toute ligne tirée par le centre *c*, & terminée de part & d'autre par la ſurface de la ſphere, s'appelle *Diametre*, & peut eſtre dite *Axe*.

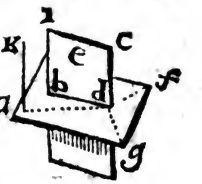
14. Toutes lignes tirées du centre *c* à la circonference, s'appellent *Rayons*, & ſont égales entre elles.

15. Deux lignes droites qui ſe touchent en ſe croiſant, ſont en meſme plan, & par conſequent tout triangle eſt auſſi en meſme plan.

16. Si deux plans *e d b*, & *d a b* ſe coupent, ils ſe coupent en une ligne droite *d b*, qui s'appelle la *commune ſection*.

Digitized by Google

17. Si une ligne *c d* eſt perpendiculaire à deux lignes *f d* & *g d*, qui ſont dans le plan *f g d*, elle ſera auſſi perpendiculaire au plan.



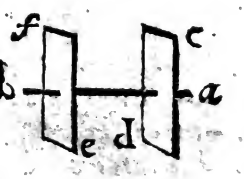
18. Si une ligne *c d* eſt perpendiculaire à trois *f d*, *g d*, *a d*, ces trois lignes ſont en meſme plan.

19. Si deux lignes *d c*, *b i* ſont perpendiculaires au meſme plan *f d b*, elles ſeront paralleles.

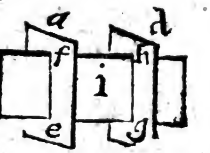
20. Si deux lignes *d c*, *b i* ſont paralleles, & qu'on tire quelque autre ligne droite de quelque point que ce ſoit d'une ligne à l'autre, comme *d b*, ces trois lignes ſeront en meſme plan.

21. Si deux lignes *d c*, *b i* ſont paralleles à une troiſiéme *a k*, encore qu'elles ne ſoient pas en un meſme plan, elles ſont paralleles entre elles.

22. Si une meſme ligne *a b* eſt perpendiculaire à deux plans *c d* & *e f*, ils ſont paralleles.



23. Si deux plans paralleles *d h g*, *a f e* ſont coupez par un troiſiéme *i*, les communes ſections *h g*, *f e* ſeront paralleles.



28. Tout parallelepipede eſt partagé en deux priſmes triangulaires égaux par le plan qui paſſe par les deux diametres paralleles des deux faces oppoſées.

29. Les priſmes triangulaires qui ſont ſur des baſes égales, & entre les meſmes paralleles, ſont égaux.

30. Les pyramides qui ſont ſur des baſes égales, & entre les meſmes paralleles, ſont égales.

31. Tous priſmes généralement, tous cylindres, & tous cones qui ſont ſur des baſes égales, & entre les meſmes paralleles, ſont égaux.

32. Les pyramides & les cones qui ſont ſur des baſes égales aux baſes des priſmes & des cylindres, & qui ſont entre les meſmes paralleles, ſont le tiers de ces priſmes ou de ces cylindres.

33. Toute la ſphere eſt égale à un cone, dont l'axe perpendiculaire eſt le demi-diametre de la ſphere, & la baſe eſt un plan égal à toute la circonference convexe de la meſme ſphere.

34. De toutes les figures ſolides que peut renfermer une meſme ſurface, la plus grande eſt la ſpherique.

35. *Corps régulier* eſt celuy qui eſt compris entre des figures régulieres & égales, duquel auſſi tous les angles ſolides ſont égaux, comme ſont....

Digitized by Google

36. Le *Tetraédre* compris ſous quatre triangles égaux & équilateraux, c'eſt une pyramide, dont la baſe eſt égale à chaque face.

37. L'*Hexaédre* ou *Cube* compoſé de ſix quarrez égaux, comme un dé à joüer.

38. L'*Octaédre* eſt de huit triangles égaux & équilateraux.

39. Le *Dodecaédre*, de douze pentagones égaux & équilateraux.

40. L'*Icoſaédre* de vingt triangles égaux & équilateraux.

41. Outre ces cinq corps réguliers, il n'eſt pas poſſible d'en trouver d'autres; ce qu'on démontre ainſi.

On prend des triangles équilateraux, qui ſont les figures les plus ſimples de toutes les rectilignes. Il en faut pour le moins trois, pour faire un angle ſolide; or ayant joint trois de ces triangles pour en faire un angle, on trouve juſtement le tetraédre : car ces trois triangles aboutiſſant en un point, laiſſent une baſe triangulaire ſemblable & égale aux faces, comme l'on voit dans la ſeule compoſition.

Joignant quatre de ces triangles, on fait l'angle de l'Octaédre.

Avec cinq de ces triangles on fait l'angle de l'Icoſaédre.

Six de ces triangles joints enſemble ne

peuvent point faire d'angle ſolide, car ils ſont égaux à quatre droits : Or tout angle ſolide eſt fait par des angles plans, qui tous enſemble doivent eſtre moindres que quatre droits : (5. 25.) ainſi il n'eſt pas poſſible de faire avec des triangles d'autres corps réguliers que ces trois.

Prenant maintenant des quarrez, & en joignant trois enſemble, on aura l'angle du cube ; & on ne ſçauroit faire d'autre corps que le cube avec des quarrez, parce que ſi l'on prenoit quatre quarrez, & qu'on les joigniſt enſemble, on ne feroit plus un angle ſolide, mais un ſeul plan. (5. 25.)

Prenant trois pentagones, on fera l'angle du dodecaédre : mais quatre pentagones ne peuvent faire un angle ſolide.

Enfin trois hexagones joints enſemble rempliſſant tous les quatre angles droits, ne peuvent faire d'angle ſolide, & trois heptagones, ou d'autres figures de plus de coſtez le pourroient faire encore moins : ainſi en tout on ne peut faire que ces cinq corps réguliers, trois avec des triangles, un avec des quarrez, & un avec des pentagones.

LIVRE SIXIE'ME.

Des proportions.

1. QUAND on parle de *Grandeur*, & qu'on dit qu'une quantité eſt *grande*, on fait toûjours quelque comparaiſon de cette quantité avec quelque autre de meſme nature, à l'égard de laquelle elle eſt dite *grande*. Ainſi nous diſons d'une montagne, qu'elle eſt petite, & d'un diamant qu'il eſt grand, parce que nous comparons cette montagne avec les autres montagnes, en comparaiſon deſquelles elle eſt *petite :* & que de meſme nous comparons ce diamant avec les autres diamans, en comparaiſon deſquels nous diſons que celuy-cy eſt *grand.*

2. Quand on conſidere ainſi une quantité en la comparant à une autre, pour voir quelle grandeur elle a en comparaiſon de cette autre ; la grandeur que l'on trouve qu'a cette quantité ainſi en comparaiſon de l'autre, s'appelle *Raiſon,* quoy-que pour ſe faire mieux entendre il faluſt dire *Comparaiſon.*

3. La quantité qu'on compare à une autre s'appelle l'*Antecedent*, & cette autre *le Conſequent.*

Digitized by Google

4. Quand de plus on considere quatre quantitez, & qu'on les compare deux à deux *a* 4 avec *b* 2, & *c* 6 avec *d* 3; si l'on trouve que *a* a autant de *grandeur* en comparaison de *b*, que *c* en a en comparaison de *d*: alors on dit que ces raisons sont égales; c'est à dire, que la raison d'*a* à *b* est égale à la raison de *c* à *d*; & que comme *a* a deux fois autant de grandeur que *b*; *c* aussi a deux fois autant de grandeur que *d*.

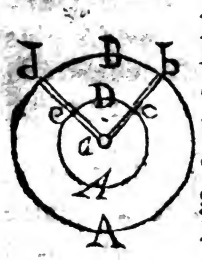
5. Mais si l'on trouve que *a* 4 ait plus de grandeur en *a b c d e* comparaison de *b* 2, que *c* 6 n'en a en comparaison de *e* 5: par exemple, si l'on trouve que *a* 4 ayant deux fois autant de grandeur que *b* 2, *c* 6 n'en a pas deux fois autant que *e* 5; alors on dit que ces raisons sont inégales, & qu'*a* a *plus grande raison* à *b*, que *c* à *e*; de sorte qu'*avoir plus grande raison* n'est autre chose qu'avoir plus de grandeur en comparaison d'une seconde quantité, qu'une troisiéme n'en a en comparaison d'une quatriéme.

6. L'égalité de raisons s'appelle *Proportion*; & quand on trouve que de quatre quantitez, la premiere a autant de grandeur à raison de la seconde, que la troisiéme en a à raison de la quatriéme, alors on dit que ces quatre quantitez sont *proportionnelles*.

Pour mieux faire comprendre tous les

myſteres des proportions, qui paſſent pour les plus difficiles de la Geometrie, comme ils en ſont ſans contredit les plus importans, je vas les expliquer par un exemple, qui tout ſeul rendra à mon avis fort intelligibles des choſes qui d'ailleurs paroiſſent aſſez embarraſſées.

7. Imaginons le cercle *b* A *d* décrit par le mouvement de la ligne *a b* autour du point *a*; & de meſme ſoit le cercle *c A e* décrit par le mouvement d'un point *c* qui ſe trouve dans la ligne *a c b*; imaginons derechef que cette meſme ligne *a c b* tourne encore une autre fois, & ſe meut juſqu'en *a e d*; l'arc *b B d* ſoit appellé *B*; l'arc *c D e* ſoit appellé *D*; tout le cercle *b B* A ſoit nommé A; tout le cercle *c D A* ſoit nommé *A*: Maintenant ſi nous comparons d'une part tout le cercle A à l'arc *B*; & de l'autre tout le cercle *A* à l'arc *D*, nous trouverons manifeſtement que le cercle A, a autant de grandeur a la raiſon de l'arc *B*, que le cercle *A* en a à raiſon de l'arc D; & que ſi *B* eſt la quatriéme ou la ſixiéme partie du cercle A, *D* auſſi ſera la quatriéme ou la ſixiéme partie du cercle *A*: ce qui s'énonce de la ſorte, *comme* A *eſt à B*,



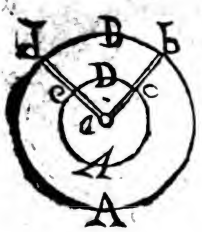
ainſi A eſt à D, & pour abreger, nous le marquerons ainſi A. *B* : : D. *A*.

8. Si maintenant nous renverſons comparant *B* à A, & *D* à *A*, nous trouverons auſſi manifeſtement que *B*. A : : *D*. *A*. de ſorte que ſuppoſé que A B : : *A*. *D*, nous tirons incontinent une concluſion qu'on appelle *invertendo* : donc *B*. A : : *D*. *A*.

9. Que ſi nous faiſons un échange en comparant un antecedent avec l'autre antecedent, & de meſme un conſequent avec l'autre conſequent, nous conclurons *alternando*, donc A. *A* : : *B*. *D*. Et cecy eſt bien manifeſte : car ſi tout le cercle A eſt double ou triple (ou en quelque autre raiſon que ce ſoit) du cercle *A*, l'arc *B* ſera auſſi double ou triple (ou enfin en meſme raiſon) de l'arc *D*. Cecy, dis-je, eſt manifeſte, puiſque les deux cercles A & *A* ſont décrits par le mouvement de la ligne *a c b*, en ſorte que *b* décrivant tout le cercle A, *c* décrit tout le cercle *A*, & *b* décrivant l'arc B, *c* décrit auſſi l'arc D ; & cela par un commun mouvement circulaire, ſinon que le point *c* ſe mouvant plus lentement que le point *b*, il décrit auſſi un cercle plus petit à proportion de la lenteur : & de meſme lorſque le point *b* aura décrit l'arc B, le point *c* aura pareillement décrit l'arc D, qui ſera plus petit à proportion de ſa lenteur.

Digitized by Google

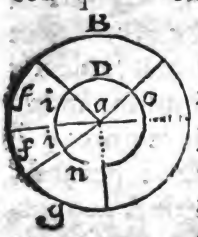
10. Si nous comparons les differences des antecedens & des conſequens avec les conſequens ; par exemple, A moins B, avec B, & *A* moins D, avec D, nous trouverons encore qu'il y a proportion, & que A moins *B*. B : : *A* moins D. D ; car il eſt bien manifeſte que l'arc *b* A *d* (qui eſt A moins B) eſt à l'arc B, comme l'arc *c A e* (qui eſt *A* moins D) eſt à l'arc D : & cecy s'appelle *Dividendo.*



11. Si nous joignons les antecedens avec les conſequens, nous trouverons que A plus B. B : : *A* plus D. D ; ce qui s'appelle *componendo.*

12. Que ſi nous concluons que A. A moins B : : *A*. *A* moins D, cela s'appellera *convertendo.*

13. Si nous prenons pluſieurs quantitez qui ſoient proportionnelles deux à deux comme B. *f* : : D *i.* & *f. g* : : *i. n*, *&c.* alors nous pouvons conclure, en prenant les premieres & les dernieres, que B. *g* : : D. *n* ; ce qui s'appelle *ex æquo ordonné.*



La propoſition qui ſuit eſt un peu embaraſſée, mais elle n'eſt pas d'importance, & on peut la laiſſer.

14. Mais si aprés avoir pris *f. g* : : *o.* D, c'eſt-à-dire, comme la penultiéme à la derniere dans le premier rang : : ainſi quelque autre quantité *o* à la premiere du ſecond rang, on conclut : donc B. *g* : : *o. i* ; c'eſt-à-dire, comme la premiere à la derniere dans le premier rang : ainſi cette autre quantité *o* à la penultiéme du ſecond rang : alors cela s'appelle *ex æquo troublé*. Or cela ſe peut toûjours conclure : car puiſque *f. g*, ou bien *i. n* : : *o.* D. il ſera auſſi *alternando & invertendo o. i* : : D. *n*, ou bien : : B. *g*.

15. Si l'on prend B autant de fois que D, par exemple, 3 B & 3 D, nous conclurons que B. D : : 3 B. 3 D. Et de meſme : : 10 B. à 10 D. ou bien : : 12 $\frac{1}{2}$ B. à 12 $\frac{1}{2}$ D ; & ainſi de quelque autre maniere qu'on multiplie ces deux grandeurs B. & D. pourveû qu'on les multiplie également, il y aura toûjours meſme raiſon entre ces grandeurs également multipliées, qu'entre ces grandeurs ſimples. Et ces grandeurs ainſi également multipliées s'appellent *Equimultiples* des ſimples B. & D, & l'on dit que les *Equimultiples* ſont entre elles comme les ſimples.

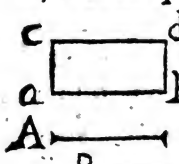
16. Si l'on partage B en meſme façon que D, & qu'on prenne, par exemple, une quatriéme partie de B, & une qua-

triéme partie de D, ou bien une dixiéme de B, & une dixiéme de D, ou telle autre partie ſemblable ; ces parties auront meſme raiſon entre elles que les totales.

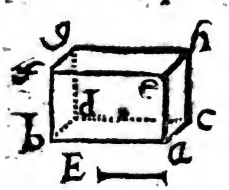
B. D :: $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{3}$ D :: $\frac{1}{10}$ B. $\frac{1}{10}$ D. *&c.*

Tout cela eſt naturellement connu.

17. *Multiplier* une ligne par une autre ligne, c'eſt faire un parallelogramme rectangle, qui ait pour les deux coſtez contigus ces deux lignes. Par exemple, on multiplie la ligne A par la ligne B, en faiſant le rectangle *a b c d*, en ſorte que *a b* ou *c d* ſoit égal à A, & *b d*, ou *a c* ſoit égal à B.

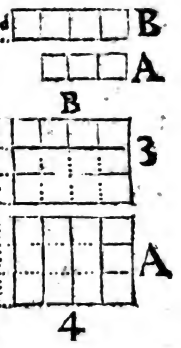


18. Multiplier un rectangle, ou une autre ſurface par une ligne, c'eſt faire un parallelepipede rectangle (5. 9.) dont la baſe ſoit cette ſurface, & la hauteur perpendiculaire ſoit cette ligne. Par exemple, on multiplie la ſurface *a b d c* par la ligne E, en faiſant le ſolide *a b f g h*, *&c.* en ſorte que ſa baſe ſoit la ſurface *a d*, & ſa hauteur *a e* ou *b f*, égale à E.



19. Pour bien concevoir ces multiplications, il faut imaginer deux lignes,

comme si elles avoient quelque largeur, & diviſer toute leur longueur en de petits quarrez, comme vous voyez en ces figures, où A eſt une ligne, ou plûtoſt une regle compoſée de trois petits quarrez, & B, eſt une autre regle compoſée de quatre petits quarrez de meſme largeur que les trois d'A. Maintenant donc multiplier A par B, ou B par A, c'eſt prendre la regle B autant de fois qu'il y a de quarrez dans A, ou bien prendre A autant de fois qu'il y a de quarrez en B; ce qui revient au meſme.

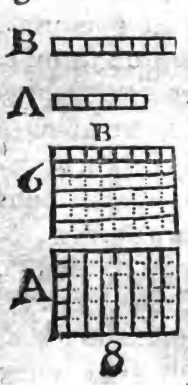


Ainſi B pris trois fois fait le premier rectangle, qui comprendra douze quarrez: & A pris quatre fois fera le ſecond rectangle, qui comprendra auſſi douze quarrez, & ſera tout-à-fait égal au premier.

2o. Il faut prendre garde que la meſme multiplication ſe fait encore, bien que dans la longueur de la ligne il ne ſe trouve point préciſément un certain nombre de petits quarrez; mais que ſi dans A, par exemple, il y a trois quarrez, & que dans B il y en ait quatre & demy, ou quatre, & telle autre partie, ou tel autre excés qu'on voudra, marqué icy *d*; on n'a qu'à prendre B trois fois pour

multiplier B par A, & l'on aura le premier rectangle composé de douze quarrez, & de trois de ces excés *d*. Et de meſmo multipliant A par B, c'eſt-à-dire, prenant A quatre fois & demi, ou bien quatre fois avec tel excés *d*, on aura le ſecond rectangle composé auſſi de douze quarrez & de trois *d*.

21. Que ſi lon imagine que la ligne B ſe retreſſit de la moitié, en ſorte que ſa longueur demeurant toûjours la meſme, il ſe trouve qu'elle ait huit petits quarrez, (c'eſt-à-dire, que ſa longueur ſoit huit fois auſſi grande que ſa largeur) il ſe trouvera auſſi que retreſſiſſant de meſme la largeur d'A, il y aura dans A ſix petits quarrez : de ſorte que ſi l'on multiplie maintenant B par A, ou A par B, il ſe fera deux rectangles tout-à-fait égaux aux deux précedens. Car B pris ſix fois, fait le premier rectangle composé de quarante-huit petits quarrez ; & A pris huit fois, fait le ſecond rectangle composé auſſi de quarante-huit quarrez : & ces quarante-huit quarrez ne valent ni plus ni moins que les douze des rectangles précedens, parce qu'un de ces douze en vaut qua-



tre de ces quarante-huit, comme il paroiſt dans la figure meſme. Ainſi quelque petite largeur que l'on donne à ces lignes, quand on les retreſſiroit à l'infini, il eſt manifeſte que les rectangles qu'elles feront eſtant multipliées l'une par l'autre, ſeront toûjours les meſmes. De ſorte que l'on peut prendre hardiment les lignes comme indiviſibles, & les multiplier, en faiſant d'elles un rectangle, puiſque jamais la grandeur de ce rectangle ne varie, quelque petiteſſe que l'on donne à la largeur des lignes.

22. Il eſt fort aiſé d'appliquer tout cecy à la multiplication des ſolides : mais au lieu de quarrez, il faut imaginer des cubes : car ſi l'on penſe une ſurface compoſée de douze cubes ; & d'un autre coſté, ſi l'on penſe de plus une ligne compoſée de deux cubes, on multipliera la ſurface douze par la ligne deux, en prenant cette meſme ſurface autant de fois qu'il y a de petits cubes dans la ligne, c'eſt-à-dire, deux fois, & alors il ſe fera un ſolide compoſé de vingt-quatre petits cubes.

23. De tout cecy il paroiſt que ces petits quarrez & ces petits cubes ſont dans la multiplication des lignes & des ſurfaces ce que les unitez ſont dans la multiplication des nombres : car multiplier un

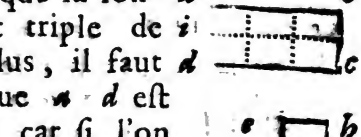
nombre par un autre, par exemple, 3 par 5, c'eſt prendre 3, autant de fois qu'il y a d'unitez en 5, ou bien prendre 5, autant de fois qu'il y a d'unitez en 3; ce qui produit quinze. Ainſi multiplier une ligne par une autre, c'eſt prendre une de ces lignes autant de fois qu'il y a de quarrez dans l'autre; & multiplier une ſurface par une ligne, c'eſt prendre cette ſurface autant de fois qu'il y a de cubes dans la ligne.

Dans un autre endroit on parlera des multiplications de ſurfaces par des ſurfaces ou par des ſolides, d'où réſultent des compoſez, qu'on appelle de plus de trois dimenſions.

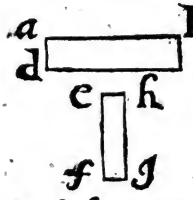
24. Toutes grandeurs ſe peuvent exprimer par des lignes: comme, ſi une grandeur eſt double ou triple d'une autre, ou en telle autre raiſon qu'on voudra, on n'a qu'à prendre deux lignes, dont l'une ſoit double ou triple de l'autre, ou en telle autre raiſon ſemblable à la raiſon des grandeurs. Ainſi pour exprimer deux temps, par exemple, une heure & deux heures, ou bien deux vîteſſes, dont l'une ſoit double de l'autre, je n'ay qu'à prendre deux lignes, *a* double de *b*, & je pourray dire qu'*a* repreſente deux heures, ou la grande vîteſſe, & *b* repreſente une heure, ou la petite

vîteſſe, & agir ſur ces deux lignes comme je ferois ſur les heures, *&c.*

25. Pour connoiſtre la proportion des rectangles, il faut connoiſtre la raiſon de la longueur de l'un à la longueur de l'autre, & de plus la raiſon de la largeur de l'un à la largeur de l'autre: par exemple, pour connoiſtre quelle raiſon a le rectangle *a c* au rectangle *e g*, il ne ſuffit pas de ſçavoir que la longueur *a b* eſt triple de *e h*, mais de plus, il faut auſſi ſçavoir que *a d* eſt double de *e f*: car ſi l'on prend *a i* égal à *e f*, le rectangle *b i* ſera triple du rectangle *e g*, puiſque *a b* eſt triple de *e h*, & *a i* égal à *e f*. Et de plus, comme *i d* eſt encore égal à *a i*, ou à *e f*, (puiſqu'on ſuppoſe que *a d* eſt double de *a i*, ou de *e f*,) le rectangle *i c* ſera auſſi triple du rectangle *e g*. Ainſi tout le rectangle *a c* eſt deux fois triple du rectangle *e g*, c'eſt-à-dire, ſextuple, ou qu'il contient ſix fois le rectangle *e g*. Ce que j'ay dit de la raiſon double & triple des largeurs & des longueurs, ſe doit auſſi entendre de toute autre raiſon que ce ſoit: car ſi *a b* eſt quadruple de *e h*, & *a d* triple de *e f*, le rectangle *a c* ſera trois fois quadruple du rectan-

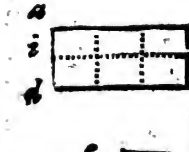


gle *e g*, c'eſt-à-dire, que *a c* ſera dodecuple de *e g*, ou le contiendra douze fois. Mais ſi *a b* eſt dodecuple de *e h*, & que *e f* ſoit triple de *a d*; alors il ſe fait une certaine compenſation. Car ſi ayant égard aux ſeules largeurs *a b* & *e h*, le rectangle *a c* a de l'avantage, & égale l'autre douze fois; d'autre part



néanmoins il perd cét avantage dans les hauteurs *a d* & *e f* où le rectangle *e g* doit égaler l'autre trois fois. Comparant donc l'avantage & le deſavantage, le rectangle *a c* eſtant d'une part douze fois auſſi grand, & d'autre part trois fois auſſi petit, reſte qu'il ſoit ſeulement quatre fois auſſi grand que *e g*.

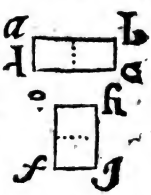
26. C'eſt ce qu'on entend, lorſqu'on dit que les rectangles ſont en *raiſon compoſée* de leurs coſtez: car ſi *a b* eſt triple de *e h*, & *a d* double de *e f*, le rectangle *a c* aura au rectangle *e g* une raiſon compoſée du triple & du double; c'eſt-à-dire, qu'il ſera deux fois triple, ou trois fois double, ou en un mot ſextuple. De meſme ſi *a b* eſt quadruple de *e h*, & *a d* triple de *e f*, ce re-



ctangle *a c* aura au rectangle *e g* une raiſon compoſée du quadruple & du triple, en ſorte qu'il ſera trois fois quadruple, ou quatre fois triple, ou en un mot dodecuple. De meſme ſi *a b* eſt dodecuple de *e h*, & *a d* ſubtriple de *e f*, (c'eſt-à-dire, que *e f* ſoit triple de *a d*) la raiſon du rectangle *a c* au rectangle *e g* ſera compoſée de la raiſon dodecuple & de la raiſon ſubtriple, en ſorte que *a c* ſera douze fois ſubtriple, ou ſubtriplement dodecuple, ou en un mot quadruple de *e g*.

Si l'on prend douze fois la troiſiéme partie d'un eſcu, on fait quatre eſcus; de ſorte que quatre eſcus ſont douze fois ſubtriples d'un eſcu, c'eſt-à-dire, ſont douze fois la troiſiéme partie d'un eſcu.

27. De là il paroiſt que ſi les coſtez de deux rectangles ſont réciproquement proportionnels, les rectangles ſont égaux: car ſi *a b* eſt double de *e h*, & que réciproquement *h g* ſoit double de *b c*, ou bien ſi *a b* eſt triple de *e h*, & *h g* triple de *b c*, ou enfin ſi quelque raiſon qu'ait *a b* à *e h*, *h g* ait auſſi cette meſme raiſon à *b c*, il eſt bien manifeſte que d'autant que le rectangle *a c* ſurpaſſe l'autre en longueur, d'autant auſſi



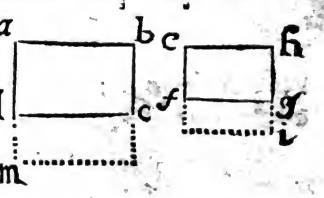
eſt il ſurpaſſé en largeur. Ainſi la longueur compenſant la largeur, l'un & l'autre eſt égal : d'où l'on tire cette propoſition tres-importante.

28. S'il y a quatre grandeurs proportionnelles, ce qui provient de la multiplication des deux moyennes, eſt toûjours égal à ce qui provient de la multiplication des deux extrémes ; comme ſi

a b. e h : : h g. b c, je dis qu'en multipliant les extrémes *a b*, & *b c*, pour en faire le rectangle *a c*, & en multipliant les moyennes *e h* & *h g*, pour en faire le rectangle *e g*, ces deux rectangles *a c* & *e g* ſeront égaux. (6. 27.) Ce qui ſe fait par lignes & par rectangles, ſe fait auſſi par quelque autre grandeur que ce ſoit, puiſque toutes grandeurs ſe peuvent exprimer par lignes, & toutes multiplications de grandeurs par multiplications de lignes, c'eſt-à-dire, par des rectangles. (6. 24.)

29. Lorſque les rectangles ont leurs coſtez proportionnels, en ſorte que *a b. e h : : a d. e f*, on dit alors que le rectangle *a c* eſt au rectangle *e g*, en *raiſon doublée* de la raiſon de leurs coſtez : car la raiſon de *a c* à *e g*, eſt compoſée de la raiſon de *a b* à *e h*, & de la raiſon

ſon de *a d* à *e f*. (6. 26.) Or la raiſon de *a b* à *e h* eſt icy (par l'hypotheſe) la meſme que la raiſon de *a d* à *e f*: ainſi pour avoir la raiſon du rectangle *a c* au rectangle *e g*, il ſuffit de prendre deux fois la raiſon de *a b* à *e h*. Par exemple, ſi *a b* eſt double de *e h*, & *a d* double de *e f*, le rectangle *a c* ſera deux fois double, c'eſt-à-dire, quadruple du rectangle *e g*:

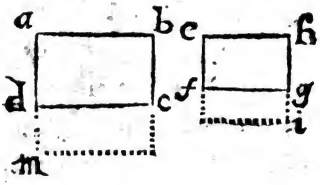


& ſi *a b* eſt triple de *e h*, & *a d* triple de *e f*; *a c* ſera trois fois triple de *e g*, c'eſt-à-dire, nonecuple: & ſi *a b* eſt quadruple de *e h*, *a c* ſera quatre fois quadruple, c'eſt-à-dire, ſexdecuple de *e g*.

30. Si l'on prend une troiſiéme ligne *n o* proportionnelle, en ſorte que *a b*. *e h* :: *e h*. *n o*. *n*——*o* les deux rectangles *a c*, & *e g*, ſeront comme les lignes *a b*, & *n o*. Car *a b* à *n o*, eſt en raiſon doublée d'*a b* à *e h*. Et ſi *a b* eſt double, ou triple, ou quatruple d'*e h*; *a b* ſera deux fois double, ou trois fois triple, ou quatre fois quatruple, de *n o*.

31. Ces rectangles qui ont ainſi leurs

coſtez proportionnels *a b. e h : : a d. e f*, s'appellent *ſemblables :* donc les coſtez *homologues* ſont ceux qui ſe répondent dans la proportion, comme *a b* & *e h*, ou bien *a d* & *e f :* car ſi *a b* eſt le plus grand coſté du rectangle *a c ; e h* ſera auſſi le plus grand coſté du rectangle *e g*.



32. Tous les quarrez ſont des rectangles ſemblables : car il eſt bien manifeſte, que ſi *a b* eſt double ou triple, *&c.* de *e h ; a m* ſera auſſi double ou triple de *h i*, puiſque *a m* eſt égal à *a b*, & *h i* à *e h*.

33. Tous les rectangles ſemblables ſont entre eux, comme les quarrez baſtis ſur leurs coſtez homologues. Je dis que le rectangle *a c* eſt au rectangle *e g*, comme le quarré *b m* au quarré *e i :* car tant ces quarrez que ces rectangles, ſont entre eux en raiſon doublée de *a b* à *e h*. (*6. 29. 32.*)

34. Pour connoiſtre la raiſon de deux ſolides parallelepipedes rectangles, il faut connoiſtre la raiſon de la baſe de l'un à la baſe de l'autre, & de plus la raiſon de la hauteur de l'un à la hauteur de l'autre : parce que la raiſon de

Digitized by Google

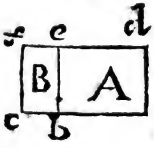
tout un ſolide à l'autre eſt compoſée des raiſons des longueurs, largeurs & hauteurs ; ce qui eſt aiſé à comprendre, ſi l'on a compris ce qui a eſté dit des raiſons des rectangles. Car ſi un parallelepipede a ſa baſe double de la baſe d'un ſecond parallepipede, & la hauteur triple de la hauteur, le premier parallelepipede ſera deux fois triple, ou trois fois double, ou en un mot ſextuple du ſecond.

35. Si les baſes de deux parallelepipedes rectangles ſont réciproquement comme leurs hauteurs, les parallelepipedes ſont égaux ; cela ſe prouve comme la vingt-ſeptiéme de ce livre ; car d'autant que l'un ſurpaſſe l'autre en largeur & en longueur, d'autant eſt-il ſurpaſſé en hauteur.

36. Lorſque les parallelepipedes rectangles ont tous leurs coſtez proportionnels, on les appelle *ſemblables*, & ils ſont en *raiſon triplée* de leurs coſtez, comme on dit des parallelogrammes, qu'ils ſont en *raiſon doublée*.

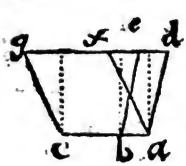
37. Les parallelepipedes rectangles ſemblables ſont entre eux comme les cubes baſtis ſur les coſtez homologues : car tant les cubes que les parallelepipedes, ſont entre eux en raiſon triplée de leurs coſtez homologues.

38. Les rectangles qui ont meſme hauteur ſont entre eux en raiſon de leurs baſes. Soient les rectangles A & B entre les paralleles *d f* & *a c*, en ſorte que



a d ſoit égal à *c f*: je dis que A. B : : *a b*. *b c*, c'eſt-à-dire, que le rectangle A eſt au rectangle B, comme la baſe *a b* eſt à la baſe *b c*. Que ſi, par exemple, *a b* eſt double de *b c*, A ſera auſſi double de B; & ſi *a b* eſt triple ou quatruple de *b c*, A auſſi ſera triple ou quatruple de B: car A n'eſt que la ligne *a b* multipliée par *a d*, (6. 17.) & B n'eſt que la ligne *b c*, multipliée par la meſme *a d* ou *b e* qui luy eſt égale. Donc (6. 15.) A. B : : *a b*. *b c*.

39. Tous parallelogrammes, qui ſont entre meſmes paralleles, ſont entre eux comme leurs baſes. Je dis que le parallelogramme *a d e b* eſt au parallelogramme *a f g e*, comme *a b* à *a c*: car ayant fait des rectangles pointillez ſur les meſmes baſes, ces rectangles ſont égaux aux parallelogrammes. (3. 14.) Or ces rectangles ſont comme leurs baſes: (par la précedente) Donc les parallelogrammes auſſi ſont comme leurs baſes, c'eſt à ſçavoir, *a d e b*. *a f g c* : : *a b*. *a c*.



40. Les triangles qui ſont entre meſmes paralleles ſont comme les baſes, car ils ſont la moitié des parallelogrammes.

41. Quand les triangles ont leurs baſes ſur une meſme ligne droite, & que leur ſommet aboutit à un meſme point, ils ſont cenſez eſtre entre meſmes paralleles, comme *a d e*, & *c d e*, ou bien *a d e*, & *b d e*.

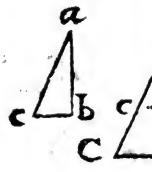
42. Si dans un triangle on tire une ligne parallele à la baſe, cette ligne coupera les jambes proportionnellement. Soit le triangle *a b c*, & la ligne *d e* parallele à *b c*, je dis que *a d. a e : : a b. a c.* & *: : d b. e c.* Car ſi l'on imagine les lignes *c d* & *e b*, le triangle *c e d* ſera au triangle *e a d*, comme *c e* à *e a*: (6. 40. 41.)

de meſme le triangle *b d e* au triangle *d a e*, eſt comme *b d* à *d a*. Or le triangle *c e d* eſt égal au triangle *b d e*: (3. 16.) donc auſſi le triangle *b d e* ou *c e d* eſt au triangle *e a d* : : comme *b d* à *d a*, ou comme *c e* à *e a*: donc encore *b d. d a : : c e. e a*, puiſque tant la raiſon de *b d* à *d a*, que celle de *c e* à *e a*, expriment une meſme raiſon du triangle *b e d* ou *c e d* au triangle *e a d*.

43. Si dans un triangle *a c b*, on tire une ligne *d e*, parallele à la baſe *c b*, je

dis que *e d. c b :: a d, a b*, ou : : *a e. a c.* car tirant *e f* parallele à *a b*, on aura *f b* égale à *e d.* (3. 9.) Or par la précedente *f b. c b : : e a. c a : :* donc *e d, c b : : e a, c a : :* ou *d a. b a.*

44. On appelle *Triangles ſemblables* ceux qui ont tous les trois angles égaux, c'eſt-à-dire, ceux de l'un à ceux de l'autre, encore que les triangles ſoient inégaux. Par exemple, ſi l'angle A eſt égal à l'angle *a*, & l'angle B à l'angle *b*, & l'angle C à l'angle *c*, tout le triangle A B C ſera ſemblable au triangle *a b c.*

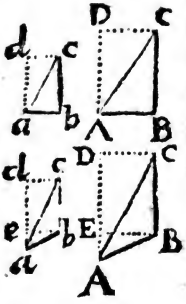


45. Quand on a trouvé que deux triangles ont deux angles égaux chacun à chacun, on aura auſſi trouvé que le troiſiéme angle ſera égal, & que les triangles ſeront ſemblables : car puiſque les trois angles dans chaque triangle font la valeur de deux droits, (2. 9.) ſi les deux angles d'un triangle ſont égaux aux deux d'un autre triangle, il faut que le troiſiéme angle de l'un, ſoit égal au troiſiéme de l'autre.

46. Tous les triangles ſemblables ont leurs coſtez (autour des angles égaux)

proportionnels. Je dis que A B. *a b* :: A C. *a c* :: B C. *b c*. Car ſi dans le plus grand triangle A B C on prend A b égal à *a b*, & A c égal à *a c*, le triangle A b c ſera tout égal au triangle *a b c*; (2. 11.) ainſi l'angle A b c eſt égal à l'angle *a b c*: (2. 11.) donc auſſi il eſt égal à l'angle B, lequel par l'hypotheſe l'eſt à l'angle *b*: donc la ligne b c eſt parallele à la ligne B C: (1. 31.) donc (6. 42. 43.) A b. A B :: A c. A C :: b c. B C.

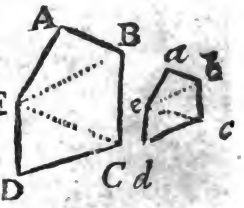
47. Tous les triangles ſemblables ſont entre eux en raiſon doublée de leurs coſtez homologues, ou comme les quarrez baſtis ſur leurs coſtez homologues. Soit *a b c* ſemblable à A B C, en ſorte que *a b*. A B :: *b c*. B C. Premierement, ſi *b* & B ſont angles droits, ſoient achevez les rectangles *b c d a*, & B C D A, ces rectangles *b d* & B D ſeront entre eux en raiſon doublée du coſté *b c*, au coſté homologue B C, ou comme le quarré baſti ſur *b c*, au quarré baſti ſur B C. (6. 29. 33.) Or le triangle *a b c* eſt la moitié du rectangle *b c d*, (3. 8.) & le triangle A B C eſt la moitié du rectangle B C D: (3. 8.) donc auſſi



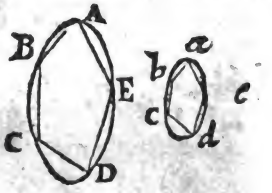
ces deux triangles ſont entre eux en raiſon doublée des coſtez homologues, *&c.* Secondement, ſi les triangles ne ſont point rectangles, comme dans les ſecondes figures, ſoient tirées les paralleles *a d* & A D, & puis ſoient faits les rectangles *b c d e* & B C D E, 1. les triangles *a d c*, & A D C ſeront ſemblables, à cauſe que l'angle *d* eſt égal à l'angle D, eſtant tous deux droits. Et de plus, l'angle *d a c* eſt égal à l'angle D A C, à cauſe qu'ils ſont égaux aux angles *a c b*, & A C B: (1. 31.) Donc *a c*. A C : : *c d*. C D. (6. 46.) Or *a c*. A C : : *b c*. B C: (par l'hypotheſe) donc *c d*. C D : : *b c*. B C: & par conſequent auſſi les rectangles *b d* & B D ſont ſemblables, (6. 31.) & ſont entre eux comme les quarrez de leurs coſtez homologues: (6. 33.) donc auſſi leurs moitiez, c'eſt-à-dire, (3. 18.) les triangles *a b c* & A B C ſont en raiſon doublée de leurs coſtez homologues, ou comme les quarrez, *&c.*

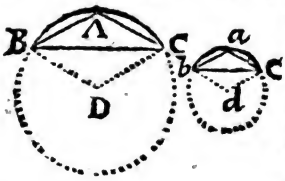
48. Les *Polygones ſemblables* ſont ceux qui ont autant de coſtez les uns que les autres, en telle ſorte que chaque

angle d'un polygone ſoit égal à chaque angle de l'autre, & que tous leurs coſtez autour des angles égaux ſoient proportionnels, comme ſi l'angle A eſt égal à l'angle *a*, & l'angle B à l'angle *b*, *&c.* & de plus que A B. *a b* :: B C. *b c* :: C D. *c d*, *&c.* Ces deux polygones ſont ſemblables.



49. Et parmy les curvilignes, ou les mixtes, *figures ſemblables* ſont celles dans leſquelles on peut inſcrire, & autour deſquelles on peut circonſcrire des polygones ſemblables: en ſorte que quelque polygone qu'on ait inſcrit ou circonſcrit en l'une, on en puiſſe inſcrire ou circonſcrire un ſemblable en l'autre. Par exemple, ſi ayant inſcrit quelque polygone qu'il m'a plû, comme A B C D E, dans la grande curviligne, j'en puis inſcrire un autre tout ſemblable dans la petite curviligne, *a b c d e*, ces deux curvilignes ſeront ſemblables. De meſme, ſi ayant pris deux mixtes, comme deux ſegmens de cercle A B C, & *a b c*, & ayant



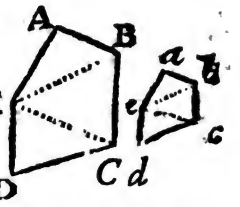


inſcrit en l'un un triangle tel qu'il m'a plû, A B C, j'en puis inſcrire en l'autre un autre tout ſemblable *a b c*, ces deux ſegmens ſeront ſemblables; & ayant achevé les cercles, ces ſegmens ſeront égales portions de ces cercles, en ſorte que ſi l'arc B A C eſt la troiſiéme partie de ſon cercle, l'arc auſſi *b a c* ſera la troiſiéme partie de ſon cercle: & ſi vers le centre on tire des lignes B D, C D, *b d*, *c d*, les angles D & *d* ſeront égaux. (Voyez 4. 11. & ſuivans.)

50. Tous les cercles ſont figures ſemblables.

51. Tous polygones ſemblables ſe peuvent diviſer en un égal nombre de triangles ſemblables. Soient les polygones ſemblables A B C D E, & *a b c d e*; le premier ſoit diviſé en ſes triangles par les lignes B E, C E: (3. 24.) je dis que l'autre eſtant auſſi diviſé en triangles par les lignes *b e*, & *c e*, tous les triangles de l'un ſeront ſemblables aux triangles de l'autre. Par exemple, *a b e* à A B E, car l'angle *a* eſt égal à l'angle A, (par l'hypoteſe) & de plus A B. *ab*:: A E. *ae*: (auſſi par l'hypotheſe) donc le triangle A B E eſt ſemblable à *a b c*,

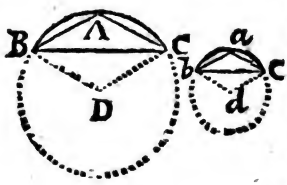
(6. 46.) On prouve enſuite que l'angle E B C eſt égal à l'angle *e b c*, à cauſe que l'angle A B C a eſté ſuppoſé égal à *a b c*, & que par ce qui vient d'eſtre prouvé, l'angle *a b e* eſt égal à l'angle A B E: donc, de choſes égales oſtant choſes égales, l'angle E B C eſt égal à l'angle *e b c*. De meſme on prouve que l'angle *e c b* eſt égal à l'angle E C B, & par conſequent (6. 45.) tout le triangle *e b c* ſera ſemblable au triangle E B C, ainſi de tous les autres.



52. Tous polygones ſemblables ſont entre eux en raiſon doublée de leurs coſtez homologues, ou comme les quarrez baſtis ſur leurs coſtez homologues. Je dis que comme le quarré d'A B eſt au quarré d'*a b*, ainſi tout le polygone A B C D E eſt au polygone *a b c d e*: car tous les triangles d'un polygone eſtant ſemblables à ceux de l'autre, (6. 51.) tous ceux de l'un ſont à tous ceux de l'autre en raiſon doublée de quelques-uns de leurs coſtez homologues quels qu'ils ſoient, c'eſt-à-dire, comme le quarré d'A B, au quarré d'*a b*.

53. Toutes figures ſemblables, meſme les curvilignes, ſont entre elles comme

les quarrez baſtis ſur quelque coſté de quelques figures ſemblables que ce ſoit qu'on y auroit inſcrites ou circonſcrites. Soit par exemple les cercles dans



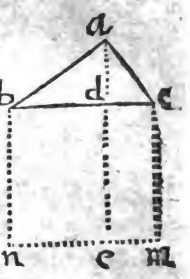
leſquels on ait inſcrit deux triangles ſemblables *b a c* & B A C, je dis que tout le cercle A B C eſt au cercle *a b c*, comme le quarré de B C au quarré de *b c*, ou ce qui eſt le meſme, comme le quarré du demi-diametre D B, au quarré du demi-diametre *d b* : car dans le cercle *a b c* on peut (du moins par la penſée) inſcrire ou circonſcrire tel polygone qu'on voudra. (4. 30.) Or tout polygone inſcrit dans *a b c* aura plus petite raiſon au cercle A B C, que le quarré ſur *b c* au quarré ſur B C, & tout circonſcrit dans *a b c* aura plus grande raiſon au cercle A B C, comme on prouvera aiſément par la précedente, & par ce qui a eſté dit du cercle au livre quatriéme : donc, *&c.*

54. Tout cecy s'applique aux ſolides. *Solides ſemblables* ſont ceux qui ont les angles égaux, & les coſtez proportionnels, ou dans leſquels on inſcrit ou circonſcrit, *&c.*

55. Les ſolides ſemblables ſont entre

eux comme les cubes, *&c.* Voyez 6. 36. 37. *&c.*

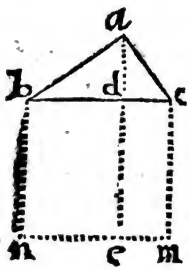
56. Si dans un triangle rectangle *a b c*, on tire du ſommet de l'angle droit *a* une perpendiculaire *a d* ſur *l'hypotenuſe* (ou grand coſté) *b c*, on aura trois triangles rectangles tous ſemblables, ſçavoir, *a d c*, *a d b*, & le total *b a c* : car 1. tous ces trois triangles ont chacun un angle droit ; 2. les triangles *a b c* & *a b d* ont l'angle *b* commun : donc ils ſont ſemblables ; (6. 45.) 3. les triangles *a b c* & *a d c* ont l'angle *c* commun : donc ils ſont ſemblables.



57. La perpendiculaire *a d* eſt moyenne proportionnelle entre *c d* & *d b*, c'eſt-à-dire, que *c d. d a : : d a. d b*. Car les triangles *c d a* & *a d b* eſtant ſemblables par la précedente, *c d*, (qui eſt la petite jambe du triangle *c d a*) ſera à *d a* (qui en eſt la grande jambe) comme *a d* (qui eſt la petite jambe du triangle *a d b*. à *d b* qui en eſt la grande jambe (6. 46.)

58. Le quarré d'*a d* eſt égal au rectangle fait de *c d* & de *d b* : car puiſque *c d. d a : : d a : d b*, (par la précedente) le rectangle des extrémes *c d* & *d b*

ſera égale au rectangle des moyennes *d a* & *d a* (6. 28.) Or les deux coſtez de ce rectangle eſtant égaux, puiſque ce n'eſt que *d a* pris deux fois, il faut que ce rectangle ſoit le quarré de *d a*; & ainſi on peut mettre pour propoſition générale, que ....



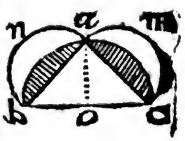
59. Le quarré de la moyenne proportionnelle eſt toûjours égal au rectangle fait des deux extrémes.

60. Pour exprimer un rectangle, il ſuffit de nommer trois lettres. Par exemple, quand on met le *rectangle b d c*, cela veut dire le rectangle, dont un coſté eſt *b d*, & l'autre *d c*; & ſi l'on diſoit *le rectangle b c d*, cela voudroit dire le rectangle, dont un coſté ſeroit *b c*, & l'autre *c d*.

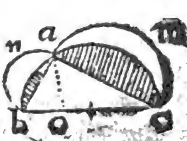
61. Dans tout triangle rectangle le quarré fait ſur l'*hypotenuſe* (ou ſur le grand coſté) eſt égal aux deux quarrez faits ſur les *jambes*. (ou ſur les autres coſtez) Soit le quarré *b c m n* diviſé par la perpendiculaire *a d e* en deux rectangles *d e m*, & *d e n*: je dis que le rectangle *d e m* eſt égal au quarré d'*a c*, & le rectangle *d e n* au quarré d'*a b*; & que par conſequent tout le quarré *b c m n* eſt égal aux quarrez

de *a c* & de *a b*: car 1. les deux triangles *a d c* & *b a c* eſtant ſemblables, (*6. 56.*) *d c* à *a c* (dans le petit triangle *a d c*) ſera comme *a c* à *b c*: (dans le grand triangle *b a c*) donc *a c* eſt moyenne proportionnelle entre *d c* & *b c*, ou *c m*; ainſi le quarré *a c* eſt égal au rectangle *d c m* (*6. 59.*) 2. Par meſme raiſon, on prouve que *b a* eſt moyenne proportionnelle entre *b d* & *b c*, ou *b n*, *&c.*

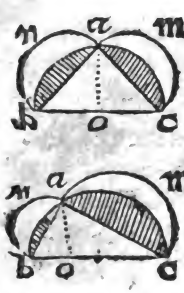
62. Si ſur les trois coſtez du triangle rectangle on baſtit trois figures ſemblables poſées ſemblablement, la plus grande ſera égale aux deux autres; car ces figures ſemblables eſtant comme les quarrez faits ſur leurs coſtez homologues, (*6. 53.*) la figure A ſera aux figures B & C, comme le quarré de *b c* eſt aux quarrez de *c a* & de *a b*. Or le quarré de *b c* eſt égal aux deux autres (par la précedente) donc, *&c.*



63. Si ſur le grand coſté *b c* on fait un demi-cercle *b a c*, & ſur les autres coſtez deux autres demi-cercles *b n a*



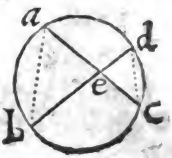
& *a m c*, ce grand demi-cercle ſera égal aux deux autres. (par la précedente) Que ſi de part & d'autre on oſte ce qui eſt commun, qui ſont les ſegmens hachez *b a*, & *a c*, ce qui reſtera de part & d'autre ſera égal ; c'eſt-à-dire, le triangle *b a c* d'une part ſera égal aux deux lunes *b n a* & *a m c* de l'autre : & c'eſt-là la quadrature des *Lunes d'Hippocrate de Scio.*



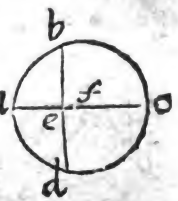
64. Lorſque le triangle *b a c* eſt iſoſcele, les lunes ſont égales ; de ſorte que le triangle *b a o*, qui eſt la moitié de *b a c*, ſera égal à chaque lune : mais lorſque le triangle eſt ſcalene, comme dans la ſeconde figure, les lunes ſont inégales, & il eſt auſſi difficile de partager le triangle *b a c* en deux par la ligne *a o*, en ſorte qu'on démontre que le triangle *b a o* eſt égal à la lune *b n a*, & le triangle *o a c* à la lune *c m a* : il eſt, dis-je, auſſi difficile de faire cela, que de trouver la quadrature du cercle.

65. Deux cordes qui ſe croiſent dans un cercle, ont leurs ſegmens *réciproques*, c'eſt-à-dire, réciproquement proportionnels. Je dis que *a e. b e : : e d. e c :* & que par conſequent le rectangle *a e c*

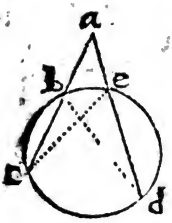
eſt égal au rectangle *b e d:* car ſi l'on imagine les lignes *d c* & *b a*, on aura deux triangles ſemblables, *a e b* & *d e c.* Car 1. ils ont un angle vers *e* oppoſé par la pointe, & par conſequent égal ; (1. 23.) 2. l'angle *d* eſt égal à l'angle *a* (4. 12.) comme inſiſtant ſur le meſme arc *b c*, & aboutiſſant à la meſme circonference : donc ces deux triangles ſont ſemblables ; ainſi *a e. b e : : e d. e c.* (6. 46.)



66. Si *a c* eſt diametre du cercle, & *d b* perpendiculaire, *d e* ou *b e* ſera moyenne proportionnelle entre *a e* & *e c*, à cauſe que *d e* ſera égale à *e b:* (4. 6.) ainſi *a e. d e : : b e* ou *d e. e c*, & le quarré *d e* ſera égal au rectangle *a e c.*

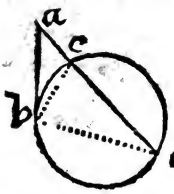


67. Deux lignes tirées d'un point exterieur vers un cercle, à la circonference duquel elles ſont terminées, ſont entre elles réciproquement comme leurs ſegmens exterieurs : je dis que *a c. a d : : a e. a b;* & que par conſequent le rectangle *c a b* eſt égal au rectangle *d a e :* car ſi l'on imagine les lignes *b d* & *e c*, on aura deux triangles ſemblables



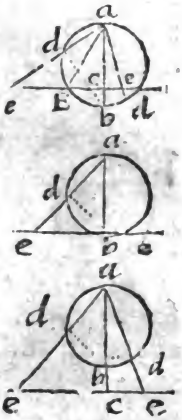
a b d & *a e c:* car 1. ils ont un angle commun *a;* 2. l'angle *d* eſt égal à l'angle *c,* (4. 12.) comme inſiſtant ſur un meſme arc *b e:* donc les triangles *a b d* & *a e c* ſont ſemblables; (6. 45.) ainſi *a d. a c : :* (qui ſont les grands coſtez des deux triangles) *: : a b. a e,* (qui ſont les petits coſtez des meſmes triangles.)

68. Si l'une de ces lignes *a b* touche le cercle en *b,* tandis que l'autre le coupe en *e* & en *d,* alors *a b* eſt moyenne proportionnelle entre *a e* & *a d:* car ayant tiré les lignes *b e* & *b d,* les triangles *a b d* & *a e b* ſeront ſemblables, à cauſe que 1. ils ont un angle commun en *a;* 2. l'angle *a b e* eſt égal à l'angle *b d e:* (4. 17.) donc ces deux triangles eſtant ſemblables, *a e. a b : :* (qui ſont les deux coſtez du petit triangle *a b e*) *: : a b. a d* (qui ſont les coſtez homologues de l'autre triangle *a d b.*)



69. Soit le diametre *a b* coupé en *c* par la perpendiculaire infinie *e e,* ou au dedans du cercle, comme en la premiere figure, ou à la circonference, comme en la deuxiéme figure, ou hors le

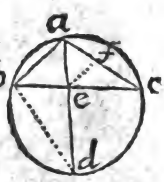
cercle, comme en la troiſiéme figure : ſoit de plus du point *a* tirée telle ligne droite que l'on voudra, coupant la perpendiculaire en *e*, & le cercle en *d*; je dis que toûjours *a d. a c : : a b. a e.* Car ſi l'on tire la ligne *b d*, on aura deux triangles ſemblables *e a c* & *d a b*, à cauſe que 1. ils ont un angle commun *e a c* & *d a b*; 2. ils en ont un autre droit, car l'angle *a c e* eſt droit, (par l'hypotheſe) & l'angle *b d a* eſt auſſi droit : (4. 14.) donc ces deux triangles eſtant ſemblables, *a d. a c : : a b. a e.*



70. Dans la deuxiéme figure, *a b* eſt toûjours moyenne proportionnelle entre *a d* & *a e*; & dans la premiere, la moyenne eſt *a E*, où le cercle coupe la ligne *c e*.

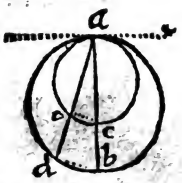
71. Si dans le triangle inſcrit, l'angle *b a c* eſt partagé en deux également par la ligne *a e d*, je dis que *b a. a e : : a d. a c*; car ayant tiré la ligne *b d*, on aura deux triangles ſemblables *a b d* & *a e c*, à cauſe que 1. l'angle *d* eſt égal à l'angle *c*, (4. 12.) comme inſiſtant ſur le

meſme arc *a b*, & aboutiſſant à la meſme circonference ; 2. l'angle *b a d* eſt égal à l'angle *e a c*, par l'hypotheſe : donc ces deux triangles ſont ſemblables : & partant *a b. a d : : a e. a c.*



72. Lors que l'angle du ſommet eſt ainſi partagé en deux également, les ſegmens de la baſe ſont proportionnels avec les coſtez, *b a. a c : : b e. e c :* car imaginant *e f* parallele à *b a*, nous aurons *b a. a c : : e f. f c.* Or *e f* eſt égal à *a f*, à cauſe que l'angle *a e f* eſt égal à l'angle *e a b*, (1. 31.) & par conſequent à l'angle *e a f :* ainſi le triangle *a f e* eſt iſoſcele ; (2. 15.) ainſi au lieu de mettre *b a. a c : : e f. f c : :* nous pouvons mettre *b a. a c : : a f. f c :* ou bien (6. 42.) *b e. e c :* ce qu'il faloit prouver.

73. Si deux cercles ſe touchent l'un dans l'autre, & que du point d'attouchement *a* on tire une tangente, & la perpendiculaire *a c b*, laquelle paſſera par les centres des deux cercles, (4. 5.) & que de plus on tire telle autre ligne que l'on voudra, coupant les deux cercles en *e* & *d*, je dis que toû-



jours *a e. a d : : a c. a b :* car ayant tiré les lignes *e c* & *d b*, les triangles *a e c* & *a d b* seront semblables ayant un angle commun en *a*, & un autre droit en *e* & en *d*. (4. 14.)

74. L'arc *e c* sera aussi à l'arc *d b*, comme tout le cercle *a e c* au cercle *a d b*. (6. 49. & 4. 11. *&c.*)

LIVRE SEPTIE'ME.

Des Incommenſurables.

1. UNE petite quantité eſt dite en *meſurer* une autre plus grande, lorſque la petite eſtant priſe un certain nombre de fois, égale préciſément la plus grande. Par exemple, ſuppoſé qu'une toiſe contienne ſix pieds, un pied *meſurera* la toiſe, parce qu'un pied pris ſix fois, égale préciſément la toiſe.

2. La quantité qui en meſure une plus grande, s'appelle *Partie* de la grande, & la grande s'appelle *Multiple* de la petite: ainſi un pied eſt partie de la toiſe, & la toiſe eſt multiple du pied.

3. Si l'on prend une grandeur d'un pas qui contienne deux pieds & demi, & qu'on veuïlle eſſayer d'en meſurer la toiſe, on ne pourra pas le faire, parce que ſi l'on prend ce pas ſeulement deux fois, on ne fera que cinq pieds, qui ne valent pas la toiſe: & ſi l'on prend ce meſme pas trois fois, on aura ſept pieds & demi, qui ſurpaſſeront la toiſe; ainſi

Digitized by Google

cette quantité de deux pieds & demi ne mesure pas la toise, & n'est pas à proprement parler *partie* de la toise : néanmoins on peut dire que c'en sont *des parties*, parce que cette quantité contient cinq demi-pieds : or un demi-pied est partie de la toise, parce qu'estant pris douze fois il la mesure ; ainsi ce pas contient des parties de la toise, puis qu'il contient cinq demi-pieds, qui sont $\frac{5}{12}$, c'est à dire, cinq douziémes parties d'une toise.

4. Lors que deux quantitez sont telles, qu'on peut trouver une troisiéme quantité qui soit partie de l'une & de l'autre, c'est à dire, qui mesure l'une & l'autre, alors ces deux quantitez sont *commensurables* ; ainsi cette quantité d'un pas d'une part, & une toise de l'autre, sont deux quantitez commensurables, parce que l'on peut donner une troisiéme quantité, sçavoir un demi-pied, laquelle mesurera la toise & ce pas : car le demi-pied pris cinq fois égale ce pas, & ce mesme demi-pied pris douze fois égale la toise.

5. Mais s'il n'est pas possible de trouver une troisiéme quantité qui mesure l'une & l'autre, alors ces deux quantitez sont *incommensurables*.

Digitized by Google

6. Les grandeurs commenſurables ſont *comme nombre à nombre*, c'eſt à dire, qu'on peut exprimer ces grandeurs par de certains nombres, en ſorte que comme une grandeur eſt à l'autre grandeur, ainſi un certain nombre ſoit à un autre certain nombre. Par exemple, ſi une ligne eſt d'une toiſe ou de ſix pieds, & une autre ligne d'un pas de deux pieds & demi, ces deux lignes ſeront comme nombre à nombre : car puis que le demi-pied meſure l'une & l'autre, l'une par cinq, & l'autre par douze, il eſt clair que l'une contenant cinq demi-pieds, & l'autre en contenant douze, ces deux lignes ſeront comme cinq à douze, & par conſequent comme nombre à nombre.

7. Si deux grandeurs ne ſont point comme nombre à nombre, c'eſt-à-dire, s'il n'eſt pas poſſible d'exprimer leurs grandeurs par deux nombres, elles ſeront incommenſurables : cela paroiſt par la précedente.

8. Il faut donc voir maintenant s'il y a en effet des grandeurs qui ſoient telles qu'on ne puiſſe point les exprimer par des nombres : car ſi cela eſt, il faudra dire qu'il y a des grandeurs incommenſurables.

9. *Un nombre plan* eſt celuy qui peut provenir de la multiplication de deux nombres,

nombres. Par exemple, ſix eſt nombre plan, parce qu'il provient de la multiplication de trois & de deux: car deux fois trois font ſix. De meſme, quinze eſt un nombre plan, parce qu'il provient de cinq multiplié par trois. De meſme, neuf eſt un nombre plan, parce qu'il provient de trois par trois.

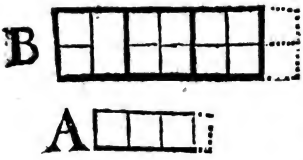
10. Les nombres, qui eſtant ainſi multipliez l'un par l'autre, produiſent un plan, s'appellent *coſtez* de ce plan, comme 2. & 3. ſont les coſtez de 6. de meſme 3. & 5. ſont les coſtez de 15.

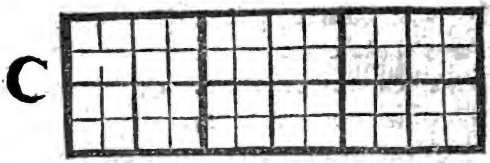
11. Si l'on imagine les unitez comme de petits quarrez, ces quarrez ſe pourront ranger en rectangle, quand leur nombre ſera plan. Par exemple, 12. quarrez ſe rangent en un rectangle, dont un coſté ſera ſix, & un autre coſté ſera deux; & de meſme 48. ſera un rectangle, dont un coſté eſt 12. & l'autre 4. Voyez les figures ſuivantes B & C.

12. *Nombre quarré* eſt un plan, dont les coſtez ſont égaux, comme 4. provenant de deux multiplié par deux, comme 9. provenant de trois par trois, comme 16. provenant de 4. par 4. *&c.*

13. Un nombre quarré ſe peut ranger en quarré; & le nombre qui ſe peut ranger en quarré, eſt quarré, & celuy qui ne ſçauroit ſe ranger en quarré, n'eſt pas nombre quarré.

14. Nombres *Plans ſemblables* ſont ceux qui peuvent ſe ranger en rectangles ſemblables, c'eſt-à-dire, en des rectangles dont les coſtez





ſont proportionnels, comme 12. & 48. car les coſtez de 12. ſont 6. & 2. comme l'on voit dans la figure B. & les coſtez de 48. ſont 12. & 4. comme l'on voit dans la figure C. or 6. 2 : : 12. 4.

15. Tous les nombres quarrez ſont plans ſemblables. (6. 32.)

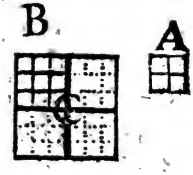
16. Tout nombre peut ſe ranger en ligne droite, & en cét eſtat il peut paſſer pour plan : de ſorte que 3. dans la figure A, ſera un plan ſemblable à 12. car les coſtez du plan de trois ſont 3. & 1. parce qu'une fois trois c'eſt trois, & les coſtez de 12. ſont 6. & 2. or 3. 1 : : 6. 2.

17. Il y a des nombres qui ne ſont pas plans ſemblables, comme depuis 1. juſqu'à 10. il y a 1. 4. 9. qui ſont ſemblables eſtant quarrez ; puis il y a 2. 8.

Digitized by Google

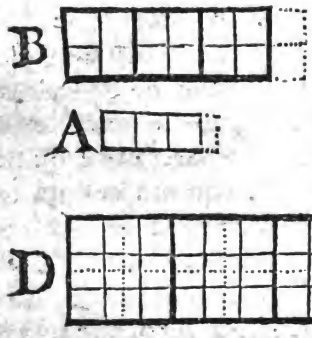
qui ont un coſté double de l'autre : les autres ne le ſont pas, comme 2. 3. 4. 5. 6. 7.

18. Si un nombre quarré multiplie un autre nombre quarré, il produira un troiſiéme quarré A. 4. & B. 9. eſtant nombres quarrez, ſe multiplient, & produiſent un nombre C ; ſçavoir 36. Je dis que ce troiſiéme nombre eſt un nombre quarré : car multiplier B par A, c'eſt prendre B autant de fois qu'il y a d'unitez dans A. Or je puis conſiderer tout le nombre B. 9. comme un quarré unique, & puis le prendre autant de fois qu'il y a d'unitez ou de petits quarrez en A : & comme ces unitez d'A ſont rangées en quarré ; auſſi je pourray ranger en quarré tout autant de quarrez B comme autant d'unitez ; de ſorte qu'icy il y aura 4. B qui feront le quarré total C. 36.



19. Si deux nombres plans ſont ſemblables, le grand ſe peut partager en autant de quarrez qu'il y aura d'unitez dans le petit. A 3. & B. 12. ſont plans ſemblables : en ſorte que le coſté 3. eſt au coſté 6. comme le coſté 1. eſt au coſté 2. Je puis partager ce plan B 12. en trois quarrez rangez de meſme que les trois petits quarrez du plan A, & chacun de

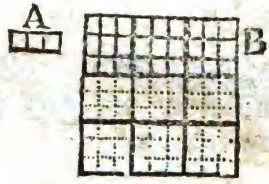
ces grands quarrez de B en vaudra 4. de ceux d'A. De meſme, ſi les plans ſont 8. & 72. je puis diviſer 72. en 8. quarrez, dont chacun en comprendra 9. de ceux du petit plan 8. La meſme choſe arrivera encore, bien qu'un de ces nombres, ou meſme tous deux ſoient rompus, comme ſi A contient 3. & demi, & B. 14. je puis partager 14. en trois quarrez & demi, diſpoſez comme ceux d'A, comme l'on voit par les petits quarrez ponctuez, qui ont eſté ajouſtez à ces figures. De meſme, ſi les plans ſont B 12. & D 27. je puis partager 27. non ſeulement en trois quarrez rangez comme ceux d'A, mais auſſi en 12. rangez comme ceux de B; ce que l'on voit icy par les lignes ponctuées. Pour cela il ne faut que partager les coſtez du grand plan en autant de parties que ſont partagez les coſtez homologues du petit plan. Les figures feront aiſément comprendre tout cecy.



20. Les nombres plans qui ſe peuvent

ainſi partager, en ſorte qu'il y ait autant de quarrez dans le grand plan, que d'unitez dans le petit, ſont ſemblables, c'eſt la converſe de la précedente.

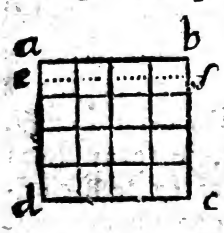
21. Deux nombres plans ſemblables multipliez l'un par l'autre produiſent un nombre quarré. Car ayant partagé le grand plan en autant de quarrez qu'il y a d'unitez dans l'autre plan, (7. 19.) on multipliera un plan par l'autre, en prenant les grands quarrez du grand plan autant de fois qu'il y a d'unitez ou de petits quarrez dans le petit plan, c'eſt-à-dire, autant de fois qu'ils ſont eux-meſmes. Or multiplier un nombre de quarrez par ce meſme nombre, c'eſt faire un quarré de ces quarrez. Par exemple A 3. & B 27. eſtant plans ſemblables, je conſidere B. 27. comme un plan compoſé de trois grands quarrez, comme A 3. eſt un plan compoſé de trois unitez, ou de 3. petits quarrez. Ainſi ſi je prens ces trois grands quarrez autant de fois qu'il y a d'unitez en A, c'eſt-à-dire, trois fois, je feray trois fois trois de ces grands quarrez de B, c'eſt-à-dire, 9. quarrez, dont chacun en vaudra 9. de ceux qui ſont dans A, & tous



ces 9. quarrez de B. en vaudront 81. de ceux d'A; de ſorte qu'A 3. multipliant B. 27. produit 81. qui eſt un nombre de petits quarrez rangez en quarré, & par conſequent (7. 13.) ce nombre 81. eſt quarré: De meſme, ſi les plans ſont 12. & D. 27. je partage 27. en 12. quarrez, que je multiplie par 12. & il provient 144. grands quarrez rangez en quarré, qui en vaudront 324. de ceux du petit plan.

22. Si deux nombres plans ſont ſemblables, de quelque façon que l'on range l'un, on pourra ranger l'autre de meſme. Soient 3. & 12. plans ſemblables comme deſſus. Qu'on range 12. en ligne droite pour faire un rectangle, dont un coſté ſoit 12. & l'autre 1. je dis qu'on pourra ranger 3. en un rectangle ſemblable, qui aura pour un coſté 6. & pour l'autre, la moitié d'un, *&c.*

23. Si un nombre diviſe un autre nombre quarré, il produira un troiſiéme nombre, qui ſera plan ſemblable au diviſeur.



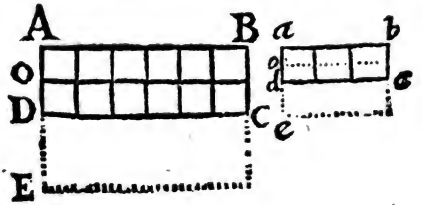
Soit le quarré *a c* 16. & qu'on le diviſe par quelque nombre que ce ſoit, par exemple, par 8. ce qui ſe fait en prenant la huitiéme partie du coſté *a d*, ſçavoir *a e*, & tirant la parallele *e f*; car on aura le plan *a f*.

qui ſera la huitiéme partie du quarré *a c*. Or diviſer un nombre ou un plan par 8. c'eſt prendre la huitiéme partie de ce nombre ou de ce plan. Je dis que *a f* eſt un plan ſemblable à 8. Car 8. eſtant rangé en ligne droite pour faire un rectangle, dont un coſté ſoit 8. & l'autre 1. le rectangle *a f* luy ſera ſemblable, puiſque *a e* a eſté pris la huitiéme partie de *a d* ou de *a b*: Donc comme 8. à 1. (qui ſont les coſtez du plan 8. diviſeur) ainſi *a b* à *a e*: (qui ſont les coſtez du plan provenant du quarré *a c* diviſé par 8.) donc, *&c.* ce qu'il faloit prouver.

24. Si deux plans ſe multipliant produiſent un quarré, ils ſont ſemblables.

25. Deux nombres plans non-ſemblables ſe multipliant, ne ſçauroient produire un nombre quarré. Ces propoſitions ſont des ſuites des précedentes.

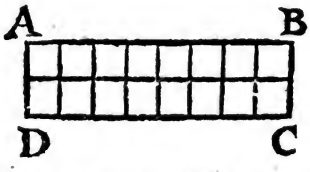
26. Si deux nombres ſont plans ſemblables, leurs équimultiples quelconques, & leurs parties-pareilles quelconques, ſont auſſi plans ſemblables. Soient les plans *a b c d* 3. & A B C D 12. ſemblables, en ſorte qu'*a b*. A B :: *b c*. B C.



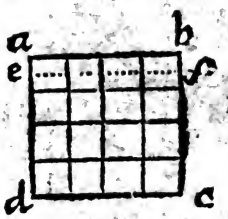
Je dis que ſi l'on prend le double *de* l'un & le double de l'autre, (ou tel autre équimultiple qu'on voudra) ces doubles ſeront ſemblables : car ayant pris *a e* double d'*a d*, & A E double d'A D, pour avoir le plan *b e* double du plan *b d*, & le plan B E double du plan B D, il eſt clair que *a d*. A D : : *a e*. A E. Or *a d*. A D : : *a b*. A B. donc auſſi *a e*. A E : : *a b*. A B ; & par conſequent les plans *b e* & B E ſont ſemblables. De meſme en ſera-t-il, ſi l'on prend leurs moitiez *b o*, B O, ou telles autres parties pareilles que l'on voudra.

27. Si deux nombres ſont plans non-ſemblables, leurs équimultiples quelconques, & leurs parties pareilles quelconques ſeront auſſi non-ſemblables. Cecy ſuit de la précedente.

28. Entre deux nombres plans ſemblables quelconques, il tombe un nombre moyen proportionnel. Soient les nombres plans ſemblables 2. & 8. je dis qu'il eſt poſſible de trouver un troiſiéme nombre qui ſera moyen proportionnel : car ſi l'on imagine le plan 8. rangé en ligne droite A B, & le plan 2. rangé auſſi en ligne droite A D, & que de ces deux lignes on en faſſe le plan



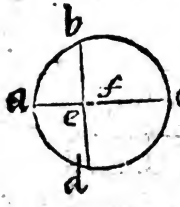
A C 16. ce plan A C 16. proviendra de la multiplication des deux nombres 2 & 8. (6. 17. & ſuivans) & par conſequent le nombre des petits quarrez de tout ce plan A C 16. ſera un nombre quarré, (7. 21.) & ſe pourra ranger en quarré, (7. 13.) Qu'il ſoit donc rangé dans le quarré *a c*; ainſi le quarré *a c* ſera égal au plan A C, puiſque ce n'eſt qu'un meſme nombre rangé autrement. Donc (6. 59.) le coſté *a b* 4. ſera moyen proportionnel entre AD 2. & A B 8.



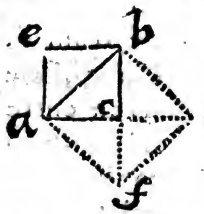
29. Entre deux nombres non-ſemblables, il ne ſçauroit tomber un nombre moyen proportionnel. Soient les nombres 4. & 6. rangez chacun en droite ligne, & que ſe multipliant ils produiſent le plan 24. ce plan 24. n'eſt point un nombre quarré; (7. 25.) & par conſequent il ne ſçauroit ſe ranger en nombre quarré. Donc il ne ſçauroit y avoir de nombre moyen entre 4. & 6. car ce nombre prétendu moyen multiplié par ſoy-meſme, produiroit un nombre quarré, & d'ailleurs égal au plan fait de 4. & de 6. (6. 59.) ce qui eſt impoſſible, puiſque ce plan 24. fait de 4. & de 6. n'eſt point nombre quarré.

30. Soient deux lignes *a e* & *e c*, comme un nombre à un autre nombre non-

ſemblable : par exemple, comme 1. à 2. Soit de plus *e b* moyenne proportionnelle, en ſorte que *a e. e b :: e b. e c :* je dis que *e b* eſt incommenſurable aux deux extrémes *a e* & *e c :* car *a e* & *e c* eſtant comme 1. & 2. c'eſt-à-dire, comme nombres non-ſemblables, (par l'hypotheſe) auſſi-bien que leurs équimultiples quelconques, (7. 27.) il ne ſera jamais poſſible de trouver un nombre moyen porportionnel entre *a e* & *e c*, (par la précedente) & par conſequent *e b* ne ſera pas à *a e* ou à *e c* comme nombre à nombre : Donc elle eſt incommenſurable.



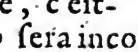
31. Le diametre d'un quarré *a b* eſt incommenſurable au coſté *a c*. Car prenant *a d* double d'*a c*, & faiſant le triangle *a b d* qui ſera ſemblable à *a b c*, à cauſe que *c d* eſtant égal à *c b*, l'angle *c d b* eſt égal à l'angle *c b d ;* (2. 15.) ainſi l'angle *c d b* eſt la moitié d'un droit, auſſi-bien que *c a b :* donc *a b d* eſt droit, *&c.* Ainſi *a c. a b :: a b. a d.* Donc *a b* eſt moyenne proportionnelle entre *a c* 1. & *a d* 2. & par conſequent (par la précedente) incommenſurable.



32. On appelle *Puiſſance* d'une ligne le quarré que l'on fait ſur cette ligne. La puiſſance de *a c* eſt le quarré *a c b e*, & la puiſſance de la ligne *a b* eſt le quarré *a b d f*. Et l'on dit que la ligne *a b peut deux fois la ligne a c*, (*bis poteſt lineam* a c) qui eſt une façon de parler priſe du Grec & receûë en Géometrie.

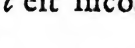
33. Le diametre *a b* eſt commenſurable *en puiſſance* au coſté *a c*, c'eſt-à-dire que le quarré *a b d f* eſt commenſurable au quarré *a c b e*, l'un eſtant double de l'autre.

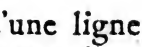
34. Mais ſi l'on prend *a o* moyenne proportionnelle entre *a b* & *a c*, cette moyenne *a o* ſera incommenſurable en puiſſance, c'eſt-à-dire, que le quarré d'*a o* ſera incommenſurable au quarré d'*a c*, ou au quarré d'*a b*: car le quarré d'*a c* au quarré d'*a o* eſt en raiſon doublée d'*a c* à *a o*, (6. 29.) c'eſt-à-dire, comme *a c* à *a b*, (6. 30.) Or *a c* eſt incommenſurable à *a b*: (7. 31.) Donc auſſi le quarré d'*a c* eſt incommenſurable au quarré d'*a o*.



35. *Seconde puiſſance* d'une ligne eſt le cube, qui a pour coſté cette ligne.

36. Si l'on prend *a n* & *a m*, deux moyennes proportionnelles entre *a c* & *a b*, en ſorte que *a o. a n* : : *a m. a b*. la ligne *a m* ſera incommenſurable en





ſeconde puiſſance à *a c*, c'eſt-à-dire, que le cube d'*a c* ſera incommenſurable au cube d'*a n*, parce que le cube d'*a c* eſt au cube d'*a n* en raiſon triplée du coſté *a c* au coſté *a n*, c'eſt-à-dire, comme *a c* à *a b*. Or *a c* & *a b* ſont incommenſurables, *&c.* Mais auſſi *a c* & *a m* ſont commenſurables en ſeconde puiſſance, car le cube d'*a m* eſt double du cube d'*a c*.

37. Il eſt aiſé d'appliquer aux nombres ſolides ce qui a eſté dit des nombres plans. On appelle *nombres ſolides* ceux qui proviennent de la multiplication d'un nombre plan par quelque nombre que ce ſoit : Par exemple, 18. eſt nombre ſolide fait de 6. (qui eſt un nombre plan) multiplié par 3. ou de 9. multiplié par 2.

38. Nombres *ſolides ſemblables* ſont ceux dont les petits cubes peuvent ſe ranger, en ſorte qu'ils faſſent des parallelepipedes rectangles ſemblables.

39. Nombres *cubiques* ſont ceux qui ſe peuvent ranger en cubes, comme 8. ou 27. dont les *coſtez* ſont 2. & 3. les *baſes* ſont 4. & 9.

40. Tout nombre cubique multipliant un autre nombre cubique, produit un troiſiéme nombre cubique.

41. Entre deux nombres ſolides ſemblables, il tombe deux nombres moyens proportionnels.

Digitized by Google

On n'a qu'à appliquer aux ſolides ce qui a eſté démontré à l'égard des plans.

42. Ces démonſtrations par leſquelles on prouve qu'il y a des lignes & des grandeurs incommenſurables, prouvent auſſi que le *Continu* n'eſt pas compoſé de points finis : car ſi le diametre auſſi-bien que le coſté d'un quarré eſtoient compoſez de points finis, le point meſureroit le coſté & le diametre : car le point ſe trouveroit un certain nombre de fois dans le coſté, & un autre certain nombre de fois, dans le diametre ; ce qui eſt impoſſible (par les démonſtrations précedentes.)

43. Comme dans un triangle rectangle le quarré du grand coſté eſt égal aux deux quarrez faits ſur les deux autres coſtez, (6. 61.) on s'eſt toûjours ſervi de ce triangle pour trouver des incommenſurables : car ſi tous les trois coſtez ſont commenſurables, ils pourront eſtre tous trois exprimez par trois nombres, & alors le quarré du plus grand nombre ſera égal aux quarrez des deux autres nombres. Comme ſi le grand coſté eſt de 5. pieds, le petit de 3. le mediocre de 4 ; le quarré de 5. ſera 25. & les autres quarrez ſeront 9. & 16. & ces deux enſemble 9. & 16. font le troiſiéme 25. Mais ſi le petit coſté eſt 2, & le mediocre 3. le grand coſté ne pourra point s'exprimer par nombres, parce

que le quarré du petit coſté 4. joint avec le quarré du mediocre 9. fait 13. qui exprime le quarré fait ſur le grand coſté : or comme ce nombre 13. n'eſt point nombre quarré, auſſi ne ſçauroit-il avoir de coſté ou de racine exprimée par aucun nombre.

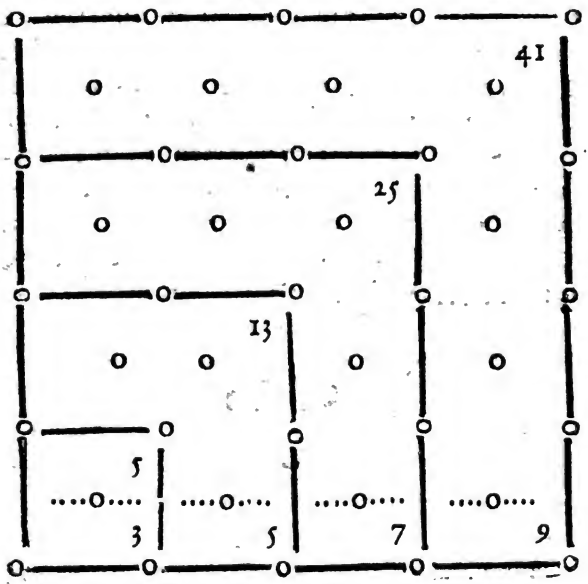
44. De tout temps on s'eſt appliqué à rechercher quelque methode pour trouver divers nombres propres à exprimer tous les trois coſtez du triangle rectangle, pour eſtre aſſeûrez que tous ces trois coſtez ſont commenſurables. Voicy une methode par laquelle on trouve tous les nombres poſſibles propres à cét effet.

45. Si l'on prend deux nombres quelconques, (meſme l'unité) qui ne different que de l'unité, & qu'on joigne enſemble les deux quarrez de ces deux nombres ; on aura un nombre qui ſera racine d'un quarré égal à deux quarrez, & ce nombre exprimant le grand coſté d'un triangle rectangle, le coſté mediocre ſera exprimé par un nombre moindre de l'unité ; & le petit coſté par les deux premiers nombres joints enſemble. Par exemple, ayant pris 1. & 2. & quarré l'un & l'autre, pour avoir 1. & 4. je joins enſemble ces deux quarrez 1. & 4. & je fais 5. je dis que 5. pourra exprimer le grand coſté, & 4. le mediocre, & 3. le petit, en ſorte que 25. quarré du grand coſté ſera

égal à 16. & à 9. quarrez des deux autres coſtez. De meſme, ſi je prens 2. & 3. & que joignant leurs quarrez 4. & 9. je faſſe 13. je dis que j'auray 13. & 12. & 5. pour coſtez d'un triangle rectangle, en ſorte que 169. quarré de 13. ſera égal à 144. & 25. quarrez de 12. & de 5. De meſme, prenant 3. & 4. & joignant leurs quarrez 9. & 16. je fais 25. je dis que 25. ſera le grand coſté du triangle, 24. le coſté mediocre, & 7. le petit.

Tout cela ſe trouve plus facilement en cette ſorte.

46. Si l'on range les unitez en ſautoir,



tous les nombres qui feront une figure quarrée ſeront des noms propres à exprimer le grand coſté. Le petit coſté ſera le nombre compris dans les deux premiers rangs de la figure quarrée, & le coſté mediocre ſera d'une unité moindre que le plus grand.

47. Cette figure continuée donnera tous les nombres poſſibles : mais il faut remarquer que les équimultiples des trois nombres trouvez auront le meſme effet ; comme ayant trouvé 5. 4. & 3. leurs doubles 10. 8. & 6. repreſenteront les trois coſtez du triangle, en ſorte que 100. quarré de 10. eſt égal à 64. & 36. quarrez de 8. & de 6. & de meſme leurs triples 15. 12. 9. feront la meſme choſe : mais l'on voit bien que tous ces nombres ayant toûjours les meſmes proportions, n'expriment jamais qu'un meſme triangle, ſçavoir, celuy qui eſt exprimé par 5. 4. & 3. & qu'ainſi tous ces nombres doivent eſtre cenſez les meſmes.

Digitized by Google

LIVRE HUITIE'ME.

Des Progreſſions & des Logarithmes.

1. UNE *Progreſſion* eſt une ſuite de quantitez qui gardent entre elles quelque ſorte de rapport ſemblable, & chacune de ces quantitez s'appelle *Terme.*

2. Lorſque les termes qui ſe ſuivent ainſi les uns aprés les autres, augmentent ou diminuënt également ; la Progreſſion s'appelle *arithmetique*, comme ſont les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. *&c.* ou bien les nombres impairs 1. 3. 5. 7. 9. 11. *&c.* ou bien encore comme 4. 8. 12. 16. ou comme 20. 15. 10. 5. 0.

3. La Progreſſion arithmetique peut augmenter à l'infini, mais non pas diminuër.

4. Si dans une Progreſſion arithmetique on prend quatre termes, dont les deux premiers ſoient éloignez l'un de l'autre autant que le ſont les deux derniers ; ces quatre termes ſont dits proportionnels en proportion arithmetique, com-

Digitized by Google

me dans la Progreſſion des nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. &c. Si nous prenons 2. 3 : : : 9. 10. (cette marque : : : nous ſervira de ſigne pour la proportion arithmetique) il y aura meſme proportion arithmetique entre 2. & 3. qu'entre 9. & 10. c'eſt-à-dire, que 10. ſurpaſſe 9. de tout autant que 3. ſurpaſſe 2. De meſme 3. 5 : : : 8. 10. ſont en proportion arithmetique. Comme auſſi 1. 5. : : : : 5. 9. ou 5. eſtant répeté deux fois, eſt le moyen arithmetique entre 1. & 9.

5. Dans la proportion arithmetique l'aggregé des deux extrémes eſt égal à l'aggregé des deux moyens, comme dans 2. 3 : : : 9. 10. l'aggregé de 2. & de 10. eſt 12. & l'aggregé de 3. & de 9. eſt auſſi 12. De meſme, dans 3. 5 : : : : 8. 10. l'aggregé de 3. & de 10. eſt 13. & l'aggregé de 5. & de 8. eſt auſſi 13. Et la raiſon de cecy eſt aſſez claire d'elle-meſme : car ſi 10. ſurpaſſe 8. auſſi ce qu'on ajouſte à 8. ſçavoir, 5. ſurpaſſe de tout autant ce qu'on ajouſte à 10. ſçavoir 3. ainſi on fait l'égalité.

6. L'aggregé ou la ſomme du premier & du dernier terme eſt égal à la ſomme du 2. & du penultiéme, ou du troiſiéme de l'antepenultiéme, &c. comme dans le premier exemple 1. & 9. font 10. & de meſme 2. & 8, ou bien 3. & 7. ou 4. &

6. font toûjours 10. & il reſte au milieu 5. qui eſtant pris deux fois (comme équivalent à deux, puis qu'il eſt également éloigné du premier & du dernier) fait auſſi 10.

7. Si l'on ajouſte le premier au dernier terme, & que l'on multiplie leur ſomme par la moitié du nombre des termes, le produit ſera égal à l'aggregé de tous les termes enſemble, comme icy ajouſtant 1. à 9. pour avoir 10. & multipliant 10. par 4. & $\frac{1}{2}$, (car il y a 9. termes) on fera 45. qui eſt la ſomme de tous les termes depuis 1. juſqu'à 9. Cecy eſt manifeſte par la précedente.

8. Lors que les termes de la progreſſion ſont continuellement proportionnels; c'eſt à dire, que le 1. eſt au 2. comme celuy-cy eſt au 3. & comme le 4. au 5. *&c.* alors la Progreſſion s'appelle *Geométrique*, comme 1. 2. 4. 8. 16. 32. ou bien 1. 3. 9. 27. 81. ou bien 3. 12. 48. 192. 768. ou bien 8. 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$, *&c.*

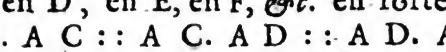
9. La Progreſſion geométrique peut augmenter & diminuer à l'infini.

10. Lors que la Progreſſion commence par 1. le ſecond terme s'appelle *Racine* ou *Coſté*: le 3e s'appelle *Quarré* ou 2e degré: le 4e *Cube* ou 3e degré: le 5e

Quarré-Quarré ou 4e degré, le 6e *Surſolide* ou 5e degré, le 7e *Quarré-Cube*, *&c.*

11. Si l'on prend quatre termes, dont les deux premiers ſoient autant éloignez l'un de l'autre dans la progreſſion, que le ſont les deux derniers, ils ſeront ſimplement proportionnels, & le produit des extrémes ſera égal au produit des moyens. (6. 28.)

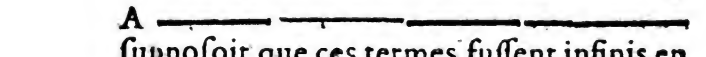
12. Soit la quantité A B diviſée en C, en D, en E, en F, *&c.* en ſorte que A B. A C :: A C. A D :: A D. A E, *&c.* je dis que B C. C D. D E. E F, *&c.* ſeront en progreſſion géometrique continuellement proportionnels, & meſme



que A B. A C :: B C. C D :: C D. D E, *&c.* car puiſque A B. A C :: A C. A D, il ſera *dividendo* A B moins A C. (c'eſt-à-dire, C B.) A C :: A C moins A D, (c'eſt-à-dire, D C.) A D. & par conſequent *alternando* C B. D C :: A C. A D. ou :: A B. A C. ainſi de toutes les autres, on prouvera :: D C. E D :: F E :: G F, *&c.*

13. Soit une Progreſſion de quantitez en ligne droite B C, C D, D E, E F, *&c.* ſoit priſe C *d* égale au ſecond terme C D, afin d'avoir *d* B, la difference du premier & plus grand terme au ſecond, & que

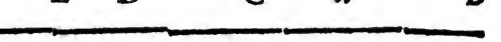
l'on faſſe comme B *d* à B C : : ainſi B C. à une 4. ligne, ſçavoir, B A. je dis que ſi le nombre des termes B C, C D, D E, *&c.* eſt fini, pour grand que ſoit d'ailleurs ce nombre, tous ces termes pris enſemble, quand il y en auroit cent mille millions, ſeront plus petits que B A. Que ſi l'on



ſuppoſoit que ces termes fuſſent infinis en multitude ; alors ces termes tous enſemble ſeroient préciſément égaux à B A : car puiſque par l'hypotheſe *B d* (c'eſt-à-dire B C moins C *d* ou C D) eſt à B C : : comme B C. (c'eſt-à-dire A B moins A C) eſt à A B ; on trouvera aiſément que comme B C. C D : : A B. A C : : A C. A D. *&c.* & par conſequent tous les termes C D, D E, E F, *&c.* ſe trouveront toûjours par-deçà le point A, duquel on s'approchera toûjours d'autant plus prés, qu'on augmentera le nombre des termes ; ainſi l'on voit bien que tous ces termes, (qui ſont ce qu'on appelle dans l'Ecole *Parties proportionnelles*) quand ils ſeroient actuellement infinis, ne feront pas une longueur infinie, puiſqu'ils ſont tous renfermez dans B A.

14. Cette démonſtration ſe rend ſenſible dans un exemple d'une progreſſion particuliere, dont les termes ſont en rai-

ſon double. Par exemple, B C. double de



C D. & C D. double de D E. *&c:* car ſi le nombre des termes eſt fini, quand il y en auroit cent millions, qu'on prenne le dernier & plus petit terme, par exemple F E, ajouſtons à ce dernier F E une autre quantité qui luy ſoit égale, ſçavoir, F A; il eſt clair que E A ſera égal au penultiéme terme E D: car ce penultiéme E D eſt double du dernier F E, par l'hypotheſe: or E A eſt auſſi double de F E, puis que nous poſons F A égal à E F. De meſme A E avec D E, c'eſt-à-dire, A D, ſera égal au ſuivant terme C D: & en ſuite A C ſera égal à B C. De ſorte que l'on voit par là que le premier & plus grand terme eſt toûjours égal à tous les autres enſemble, pourveû qu'on y ajouſte une quantité égale au dernier & plus petit terme: mais que ſi on n'y ajouſte rien, le premier eſt toûjours plus grand que tous les autres pris enſemble. Si l'on ſuppoſe que ces termes ſoient actuellement infinis, alors le plus grand terme B C ſera préciſément égal à tous les autres infinis pris enſemble, C D, D E, E F, *&c.* Car l'on voit bien que plus on ajouſte de termes, plus auſſi on avance vers A, en retranchant toûjours la moitié de ce qui reſte.

Digitized by Google

Or retranchant ainſi continuellement d'une quantité la moitié, & de ce qui reſte encore la moitié, & puis encore la moitié de ce qui reſte, il eſt manifeſte que ſi l'on ſuppoſoit qu'on euſt retranché actuellement une infinité de fois ainſi la moitié, il ne reſteroit plus rien. Cela ſe peut auſſi démontrer par la réduction à l'impoſſible, en montrant que tous ces termes infinis pris enſemble ne ſont ni plus grands, ni plus petits que B A.

15. Par là on peut réſourdre des difficultez que l'on fait dans les Ecoles contre la diviſibilité du continu, & que ceux qui ne ſçavent pas la Geométrie penſent eſtre inſolubles, mais qui au fond ne ſont que de purs paralogiſmes.

16. Si l'on met deux Progreſſions, l'une geométrique, commençant par 1. & l'autre arithmetique, commençant par 0, en ſorte que les termes de l'une répondent vis-à-vis des termes de l'autre, les termes de l'arithmetique s'appelleront *Logarithmes*, & *Expoſans*, comme

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256.

17. Ce qui ſe fait par multiplication & par diviſion dans la Progreſſion geométrique, ſe fait par addition & par ſouſtraction dans les logarithmes : Comme ſi ayant les trois nombres 2. & 8 :: 64. on

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.
1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256.

veut chercher le quatriéme nombre proportionnel dans la progreſſion geométrique, il faut multiplier le 8. par 64. (qui ſont les deux termes moyens) car le produit 512. ſera égal (6. 28.) au produit de 2. & de cét autre quatriéme nombre, qui doivent eſtre les extrémes des 4. proportionnels : ainſi pour trouver ce quatriéme nombre, il faut ſeulement diviſer 512. par 2. & l'on aura 256. ainſi 2. 8. : : 64. 256. de ſorte que 64. & 256. ſeront autant éloignez l'un de l'autre dans l'ordre de la progreſſion que le ſont 2. & 8. (8. 11.) mais ſi au lieu des nombres geométriques 2. 8. : : 64. on avoit pris les logarithmes qui leur répondent, ſçavoir, 1. 3. : : : 6. & qu'on euſt voulu trouver le quatriéme logarithme, il auroit falu ajouſter 3. à 6. pour avoir 9. & oſter 1. de 9. pour avoir 8. qui ſeroit le logarithme qui répond au nombre geométrique 256.

18. De meſme, ſi l'on prend deux nombres geométriques 4. & 8. ſur leſquels répondent les logarithmes 2. & 3. en multipliant 4. par 8, on aura 32. qui ſera ſous le logarithme 5. lequel provient de l'addition de 2. & de 3.

19. De meſme prenant 16. & le multipliant par luy-meſme, on aura 256. qui ſera ſous

ſous le logarithme 8. lequel provient de 4. ajouſté à ſoy-meſme.

20. Ainſi, ſi l'on veut trouver le nombre geométrique qui ſeroit ſous le logarithme 16. il faudroit prendre 256. qui eſt ſous 8. & le multiplier par ſoy-meſme, & on auroit 65536.

21. Que ſi encore on veut avoir le nombre geométrique qui devroit répondre au logarithme 23. il faut prendre deux logarithmes, qui joints enſemble faſſent 23. comme 7. & 16. & multiplier les nombres geométriques qui leur répondent l'un par l'autre, ſçavoir, 128. (qui eſt ſous 7.) par 65536. (qui doit eſtre ſous 16.) & le produit 8388608. ſera celuy qui doit eſtre ſous le 23. logarithme, c'eſt-à-dire, qui doit eſtre à la vingt-quatriéme place, aprés le premier nombre 1.

22. D'où l'on voit comment on peut aiſément répondre à la demande qu'on fait ordinairement, à combien reviendroit un cheval qu'on acheteroit à cette condition, que pour le premier clou du fer on donneroit un double, & pour le ſecond clou deux doubles, pour le troiſiéme quatre doubles, pour le quatriéme huit, & ainſi juſqu'au vingt-quatriéme: car le vingt-quatriéme couſteroit 8388608. doubles, c'eſt-à-dire, 69905.

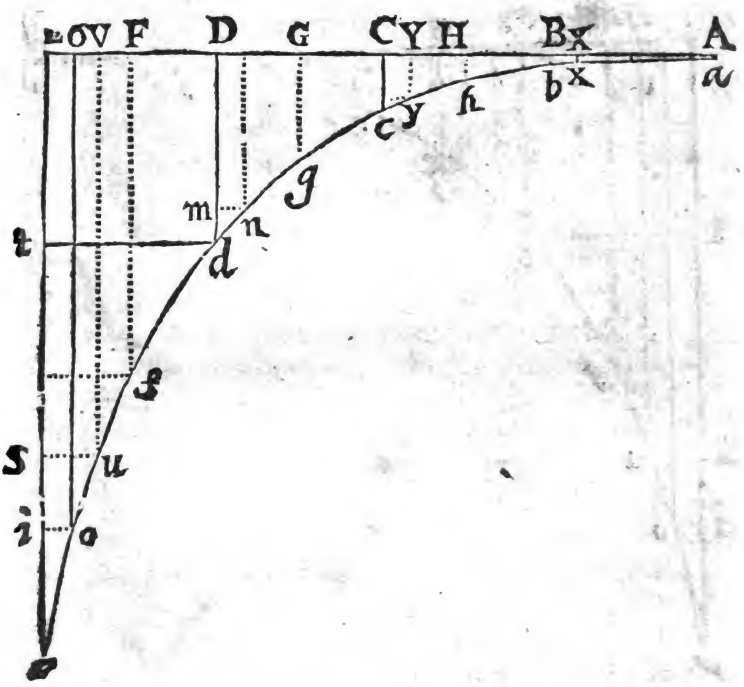
livres 8. doubles, & en doublant cette ſomme (ſuivant 8. 14.) on trouvera que tout le cheval aura couſté 139810. livres.

23. Si l'on avoit dans de grandes tables d'un livre de longues Progreſſions toutes faites, qui ſe répondiſſent ainſi, l'une geométrique, & l'autre arithmetique ; on s'épargneroit bien de la peine à calculer, pour trouver les nombres geométriques : car ſi l'on nous donnoit ces trois nombres 32. 64. 128. & qu'on demandaſt le quatriéme geométrique ; au lieu de multiplier 64. par 128. & de diviſer le produit par 32. (ce qui eſt fort ennuyeux dans les grands nombres) il ne faudroit que prendre le logarithme des trois nombres donnez, ſçavoir, 5. 6. 7. ajouſter 6. à 7. & du produit 13. oſter 5. & il reſteroit 8. qui ſeroit le logarithme du quatriéme geométrique : de ſorte que conſultant la table pour voir quel nombre répond à 8. je trouverois 256.

24. Mais parce que dans une progreſſion geométrique, comme celle-cy, tous les nombres ne ſe trouvent pas, on a trouvé le moyen de faire deux progreſſions, dont l'une, qui contient tous les nombres 1. 2. 3. 4. 5. *&c.* & qui ſemble eſtre la Progreſſion arithmetique, a néanmoins les proprietez de la geomé-

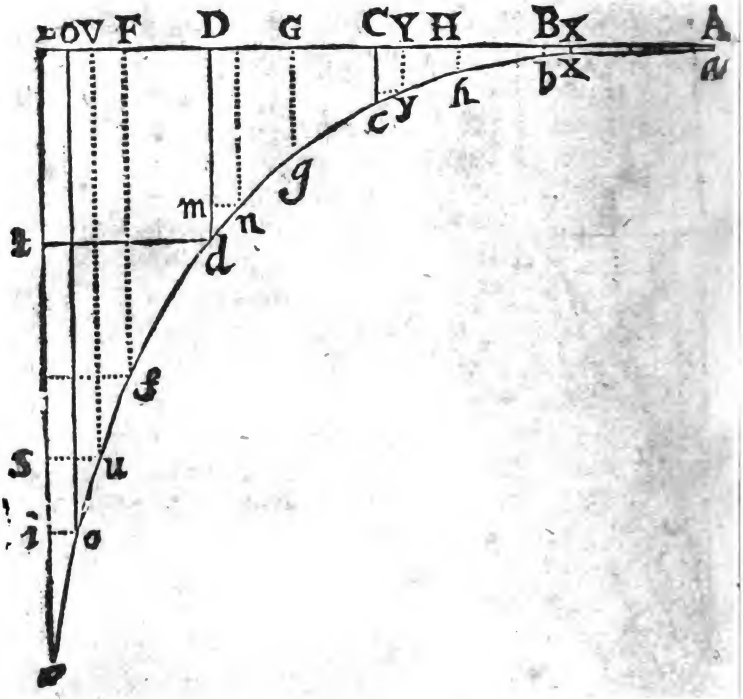
trique ; & l'autre, qui contient des nombre en apparence plus irréguliers, eſt néanmoins la Progreſſion arithmetique. Voicy une ligne qui fait comprendre parfaitement tous ces myſteres.

25. Soit la ligne droite A E diviſée



par parties égales A B, B C, C D, D E, *&c.* Par les points A, B, C, *&c.* ſoient imaginées les lignes droites *Aa*, *Bb*,

C c paralleles entre elles, qui ſoient en Progreſſion geométrique: par exemple qu'A *a* eſtant 1. *B b* 10. *C c* ſoit 100. D *d* 1000. E *e* 10000. *&c.* nous aurons deux Progreſſions de lignes, l'une arithmetique, & l'autre geométrique: car les



lignes AB, AC, AD, AE, ſeront en Progreſſion arithmetique, comme 1. 2. 3. 4. & ainſi repreſenteront les loga-

rithmes auſquels répondront les lignes geométriques A *a*, B *b*, C *c*, *&c.*

26. Chacune des parties E D, D C, *&c.* ſoit diviſée également en F, G, H, *&c.* & ſoient tirées les paralleles F *f*, G *g*, *&c.* moyennes proportionnelles entre leurs collaterales, c'eſt-à-dire, E *e*. F *f* : : F *f*. D *d* : : D *d*. G *g*, *&c.* Derechef ſoient encore tirées d'autres moyennes proportionnelles par le milieu de chaque partie E F, F D, D G, *&c.* & ainſi de ſuite juſqu'à ce que ces lignes paralleles ſoient fort prés les unes des autres, & qu'enfin on imagine une ligne courbe qui paſſe par les extrémitez de toutes ces paralleles *e f d g*, *&c.* on aura une ligne, dont les propriétez ſont tres-conſiderables, & les uſages tres-grands, comme l'on verra en ſon lieu.

27. Si cette figure avoit eſté formée ſur une fort grande table, & avec toute la juſteſſe requiſe, on pourroit diviſer chaque partie A B, B C, *&c.* non ſeulement en 100. ou en 1, 000. mais en 10, 000 ou en 100, 000. ou en davantage. De ſorte que A B eſtant de 100, 000. A C. ſeroit de 200, 000. & A D de 300, 000, *&c.* ce qui eſt toûjours en Progreſſion arithmetique.

28. La ligne E *e* eſtant ſuppoſée de 10, 000 parties, imaginons que par chacune de ces parties ſoient tirées des paralleles à la ligne A E, qui coupent la courbe en autant de points. Par exemple, ſoit la ligne *i o* tirée par la partie 9, 900. de E *e* qui coupe la courbe au point *o*. Soit encore la parallele *o* O, qui coupe la ligne A E, au point O dans la 399. 563. partie, & l'on connoiſtra par là que 399, 563. eſt le logarithme de 9, 900. De meſme, ſi S *u* paſſoit par la partie 9, 000 de la ligne E *e*, & que *u* V coupaſt la ligne A E dans la 395, 424. ce nombre-cy ſeroit le logarithme de 9, 000. *&c.*

29. Ainſi l'on pourroit faire une table de logarithmes depuis 1. juſqu'à 10, 000. & meſme encore plus avant, ſi l'on vouloit allonger la ligne A E.

30. Remarquez qu'il ſuffit, pour avoir tous ces logarithmes depuis 1. juſqu'à 10, 000. de trouver les logarithmes depuis 1, 000 juſqu'à 10, 000. c'eſt-à-dire, (aprés avoir tiré la parallele *d t*) en prenant les logarithmes de toutes les parties depuis *t* juſqu'à *e*, dont les logarithmes ſont terminez entre E & D: car avec cela on aura les logarithmes de toutes les autres parties qui ſont depuis *t* juſqu'à E, & dont

les logarithmes ſont entre D & A. Par exemple, O *o* eſtant de 9, 900. parties, & ſon logarithme 399, 563. ce meſme nombre ſervira auſſi de logarithme pour *n* N 990. & pour *y* Y 99. en changeant ſeulement le premier chifre 3. parce que, ſuivant la compoſition de cette ligne, O N, ou N Y, doivent eſtre égales à E D ou D C; ce que chacun pourra aiſément démontrer. Ainſi O N, ou N Y contiendront 100, 000. & puiſque A O eſt 399, 563. oſtant O N 100, 000. il reſtera 299, 563. pour A N, duquel oſtant encore 100, 000. il reſtera 199, 563 pour A Y, & de meſme façon ayant A V 395, 424. pour logarithmes de V *u* 9, 000. on aura auſſi 095. 424. pour logarithmes de X *x* 9. ou 195. 424. pour logarithmes de 90. ou 295, 424. pour logarithmes de 900.

31. Tout cecy ſe peut auſſi réduire en pratique par le calcul, ſans faire en effet ces figures, mais ſeulement en ſe les imaginant toutes faites : car par l'arithmetique on peut trouver un nombre moyen proportionnel F *f* entre les deux D *d* & E *e*, & aprés cela encore des moyens entre D *d* & F *f*, ou entre F *f* & E *e*, *&c.* Mais ce que nous venons d'expliquer eſt ſuffiſant, pour donner

toute la connoiſſance que nous devons avoir de la nature & de l'artifice des logarithmes : car on ne doit pas ſe mettre en peine de les calculer en effet, & de les trouver, puiſque tout cela eſt déja tout fait ; Dieu, pour le bien public, ayant ſuſcité des perſonnes, à qui il a donné aſſez de patience, pour ſurmonter l'ennuy d'un travail qui devroit paroiſtre inſupportable : car nous ſçavons que plus de 20. perſonnes gagées pour cela ont paſſé plus de 20. ans à calculer avec une aſſiduité infatigable.

32. Outre ces deux Progreſſions, il y en a une troiſiéme, qu'on appelle *Harmonique*, lorſqu'en prenant trois termes qui ſe ſuivent immediatement, on trouve que le plus grand eſt au plus petit, comme la difference du plus grand & du moyen eſt à la difference du moyen & du plus petit, comme 30. 20. 15. 12. *&c.* ſont en Progreſſion harmonique : car en prenant 30. 20. 15. la difference de 30. & de 20. eſt 10. la difference de 20. & 15. eſt 5. or 10. 5 : : 30. 15.

33. Cette Progreſſion peut diminuër à l'infini, mais non pas augmenter.

Tout ce que l'on a dit juſqu'à preſent de cette Progreſſion, n'eſt pas de grand uſage, & je ne veux pas m'engager à dire icy des choſes extraordinaires.

On verra dans la ſuite de cette Geométrie quelques propriétez aſſez conſiderables de cette Progreſſion, qui pourront donner quelque éclairciſſement, pour entendre ce que nous avons de la Muſique des Anciens, dont l'obſcurité n'a pas encore eſté penetrée. On y démontrera le rapport que l'Hyperbole a avec cette Progreſſion; car comme l'angle rectiligne ſert pour trouver entre deux données tant de moyennes que l'on voudra en raiſon arithmetique; & que cette ligne courbe que nous venons de décrire pour les logarithmes, ſert pour trouver auſſi entre deux données autant de moyennes que l'on voudra en raiſon geométrique; de meſme l'on fera voir que l'Hyperbole ſert pour trouver entre deux données autant de moyennes que l'on voudra en raiſon harmonique.

34. Il y a encore la Progreſſion des quarrez, & celle des cubes, des quarré-quarrez, ſurſolides, quarrécubes, *&c.* comme 1. 4. 9. 16. 25. 36. *&c.* qui ſont tous les quarrez, dont les racines ſont les nombres naturels 1. 2. 3. 4. 5. 6. *&c.* De meſme, 1. 8. 27. 64. 125. 216. qui ſont les cubes des meſmes nombres. De meſme, 1. 16. 81. 256. 625. 1296. qui ſont les quarré-quarrez des meſmes nombres, *&c.*

35. Dans la Progreſſion des quarrez mettant o pour premier terme, ainſi o. 1. 4. 9. 16. *&c.* la ſomme de tous les

termes eſt plus grande que le tiers du dernier terme multiplié par le nombre des termes ; & cét excés qui eſt au deſſus du tiers, eſt toûjours d'autant plus petit, que le nombre des termes eſt plus grand. De meſme, dans la Progreſſion des cubes, cette ſomme des termes eſt plus grande que le quart ; & dans les quarréquarrez, elle eſt plus grande que la cinquiéme partie, & ainſi conſecutivement des autres. Pour prouver cecy, il ſuffit d'en faire une induction, comme l'on voit dans cette table, où le ſecond

1	0	0	0	
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$ ou $\frac{1}{3} + \frac{1}{36}$

Digitized by Google

rang contient la progreſſion des quarrez depuis 0. Le troiſiéme rang contient les ſommes des termes. Par exemple, l'on y voit que la ſomme depuis 0. juſqu'à 9. eſt 14. Le quatriéme rang contient le produit de chaque terme multiplié par le nombre des termes qui ſont depuis 0 juſqu'à luy ; lequel nombre eſt marqué dans le premier rang, comme 36. eſt le produit de 9. multiplié par 4. Le cinquiéme rang contient des fractions, qui marquent la proportion des nombres du troiſiéme & du quatriéme rang, comme vis-à-vis de 14. & de 36. on trouve $\frac{7}{18}$; ce qui veut dire que 14. eſt à 36. comme 7. à 18. & qu'ainſi la ſomme des termes 14. eſt au produit de 9. multiplié par 4. ſçavoir, à 36. comme 7. à 18. Davantage, dans ce meſme cinquiéme rang, aprés $\frac{7}{18}$ on voit encore ces caracteres ; (ou $\frac{1}{3}$ † $\frac{1}{18}$) ce qui veut dire que $\frac{7}{18}$ valent autant qu'un tiers ; & de plus une dix-huitiéme partie, parce qu'en effet $\frac{7}{18}$ valent autant que $\frac{6}{18}$ plus $\frac{1}{18}$, c'eſt-à-dire que

1	0	0	0	
2	1	1	2	$\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{6}$
3	4	5	12	$\frac{5}{12}$ ou $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{12}$
4	9	14	36	$\frac{7}{18}$ ou $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{18}$
5	16	30	80	$\frac{9}{24}$ ou $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{24}$
6	25	55	150	$\frac{11}{30}$ ou $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{30}$
7	36	91	252	$\frac{13}{36}$ ou $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{36}$

$\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{18}$ de ſorte que la ſomme 14. eſt le tiers du produit 36. & outre cela encore il contient de plus une dix-huitiéme partie de 36. De meſme, on trouve que 30. qui eſt la ſomme des termes juſqu'à 16. eſt plus du tiers de 80. qui eſt le produit de 16. par 5. & que l'excés eſt $\frac{1}{24}$: Car $\frac{30}{80}$ valent autant que $\frac{3}{8}$ ou que $\frac{9}{24}$ ou que $\frac{8}{24} \dagger \frac{1}{24}$ ou enfin que $\frac{1}{3} \dagger \frac{1}{24}$ Or $\frac{1}{24}$ n'eſt pas tant que $\frac{1}{18}$; ainſi

l'on voit dans la ſuite de cette table que ces excés qui ſont au deſſus du tiers, vont toûjours en diminuant, à meſure que le nombre des termes croiſt : car ces excés ſont $\frac{1}{24}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{42}\ \frac{1}{48}$, &c. le dénominateur de la fraction augmentant toûjours de ſix.

36. Si l'on fait une table ſemblable pour les cubes, on trouvera que les fractions qui ſeront au deſſus du quart diminuëront toûjours en valeur, leur dénominateur augmentant de 4. à chaque nouveau terme qu'on ajouſtera à la Progreſſion ; & de meſme, à l'égard des autres Progreſſions, on trouvera, par de ſemblables tables, ce qui a eſté dit généralement dans la propoſition précedente.

Tout cecy ſera tres-utile dans la ſuite de cette Geométrie, où l'on traitera encore de pluſieurs autres Progreſſions.

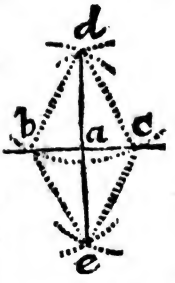
LIVRE DERNIER.

Problemes, ou la Geometrie Pratique.

1. ON appelle *Probleme* en Geometrie, une propoſition qui enſeigne à faire quelque choſe, & qui en démontre la pratique, au lieu que les *Theoremes* ſont des propoſitions ſpeculatives, dans leſquelles on conſidere les proprietez des choſes toutes faites.

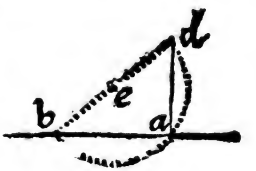
2. *D'un point donné* a *dans la ligne* b a c, *tirer une perpendiculaire.* Prenez avec le compas deux parties égales de part & d'autre *a c*, & *a b:* il n'importe point que ces parties ſoient grandes ou petites, pourveû qu'elles ſoient égales. Ouvrez le compas un peu davantage, & des points *b* & *c*, comme des centres, tirez l'un aprés l'autre, deux petits arcs ſamblables, qui ſe croiſent au point *d*. Puis

appliquant la regle ſur les points *a* & *d*, tirez la ligne *a d*, & ce ſera la perpendiculaire requiſe. (2. 16.)



3. *D'un point donné* d *tirer une perpendiculaire vers la ligne* b a c. Du centre *d* faites un arc de cercle, qui coupe la ligne en deux endroits *b* & *c*: puis de ces deux points *b* & *c* tirez avec la meſme ouverture du compas, deux petits arcs qui ſe croiſent en *e*, la ligne *d e* ſera la perpendiculaire requiſe. (2. 16.)

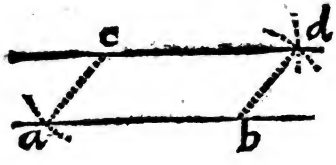
4. Lors que les points donnez *a* ou *d* ſont vers les extrémitez du papier ou de la ſurface où l'on doit faire la figure, & qu'on ne peut pas prendre une diſtance raiſonnable au-delà du point *a*, ſuivant les pratiques précedentes; alors il faut faire ainſi. Quand le point *a* eſt donné dans la ligne, prenez tel point que vous voudrez vers *e*, & de là comme du centre tirez un cercle qui paſſe par *a*, & qui coupe la ligne en *b*: puis de *b* tirez la ligne *b e*, qui, eſtant continuée, aille couper le



Digitized by Google

cercle en *d*; la ligne *d a* ſera perpendiculaire ſur *b a*. (4. 14.) Que ſi le point *d* eſt donné hors la ligne, & non pas le point *a*, tirez une ligne telle que vous voudrez *d b*, & du milieu de cette ligne *e* faites un cercle *b a d*, qui coupe *b a* en *a*; la ligne *d a* ſera la perpendiculaire requiſe. (4. 14.)

5. *D'un point donné tirer une parallele à une ligne donnée.* Soit la ligne donnée *a b*, & le point *c*, par lequel il faut tirer une parallele: du point *c* comme d'un centre, faites un arc de cercle, qui coupe la ligne donnée en *a*: dans la meſme ligne donnée, prenez un point *b* tel



que vous voudrez, le plus éloigné néanmoins qu'il ſe pourra du point *a*, & de ce point *b* à la meſme ouverture de compas faites un autre arc de cercle *d*: prenez avec le compas la diſtance *a b*; & à cette meſme ouverture, du point *c* comme du centre, faites un arc qui coupe l'autre en *d*, appliquant la regle ſur les deux points *c* & *d*, vous aurez la ligne *c d* parallele à *a b*: car le quadrilatere *c a b d*, a les coſtez oppoſez égaux par l'operation, & par

conſequent il eſt parallelogramme, par la converſe de la 9. propoſition du livre 3.

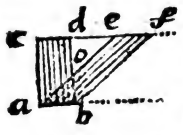
6. *Entre deux lignes données* a e *&* e c, *trouver la moyenne proporrionnelle.* Aprés avoir mis les deux lignes l'une aprés l'autre en ligne droite, pour en faire la ligne totale *a c*, prenez-en le milieu *f*, & de ce point *f* décrivez le cercle *a b c*: levez la perpendiculaire *e b* qui coupe la circonference du cercle au point *b*, la ligne *e b* ſera moyenne, en ſorte que *a e. e b :: e b. e c.* (6. 66.)

7. *Faire un quarré égal à un rectangle donné.* Prenez la moyenne entre les coſtez du rectangle, & le quarré ſur cette moyenne ſera le requis. (6. 59.)

8. *Trois lignes eſtant données, trouver la quatriéme proportionnelle.* Soient les lignes données *a d*, *d e*, *a b*, aprés avoir mis *a d* & *a b* l'une ſur l'autre, & *d e* de travers, pour faire un triangle *a d e*, continuez le coſté *a e* vers *c*, & du point *b* tirez la parallele *b c*, je dis que *b c* ſera la quatriéme proportionnelle requiſe, & que *a d. d e :: a b. b c.* (6. 43.)

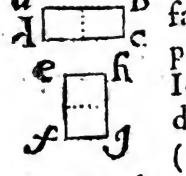
Digitized by Google

9. *Faire un parallelogramme rectangle égal à un triangle donné* a e b. Par le ſommet *e* tirez *e c* parallele



à la baſe *a b*, le rectangle *a b d c* ſera double du triangle *a e b*: (3. 18.) ainſi en partageant la baſe *a b* en deux également, & élevant une perpendiculaire, on fera un rectangle égal au triangle.

10. *Un rectangle eſtant donné, faire un autre rectangle qui luy ſoit égal, & qui ait la longueur donnée.* Soit le rectangle

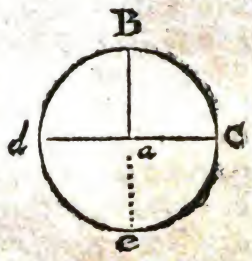


donné *a b c*, & qu'il en faille faire un autre égal, qui ait pour coſté la longueur *e f*. Icy nous avons trois lignes données, ſçavoir *a b*, *b c*, (qui ſont les coſtez du rectangle donné) & *e f* qui doit eſtre un coſté de l'autre rectangle que l'on veut faire. On doit chercher maintenant une quatriéme ligne, pour eſtre le deuxiéme coſté de ce rectangle. Ayant ces trois lignes données, trouvez-en la quatriéme proportionnelle (9. 8.) qui ſoit *e h*, en ſorte que *e f. a b : : b c. e h*: je dis que le rectangle *f e h* ſera le requis égal au rectangle *a b c* (6. 27.)

11. *Quarrer quelque polygone que ce ſoit.* Réduiſez le polygone en triangles, (3. 22.

ou 24.) faites autant de rectangles égaux à ces triangles, (9. 9.) en ſorte que tous ces rectangles ayent une meſme longueur: (9. 10.) joignez tous ces rectangles enſemble, pour en faire un rectangle total, & faites un quarré (9. 7.) égal à ce rectangle, & vous aurez ce que vous prétendiez.

12. *Diviſer un cercle en quatre & en ſix, & tous les arcs en deux parties égales.* Pour le diviſer en 4. il faut tirer deux perpendiculaires par le centre, comme *d a c* & B *a e*. Si on veut le diviſer en 8. on n'a qu'à diviſer en deux chaque arc *B c*, *c e*, *&c.* ce qui ſe fait en décrivant des points B & *c*, deux arcs de cercles à la meſme ouverture du compas: car du point où ces deux arcs ſe croiſent, on tirera vers le centre *a* une ligne qui diviſera l'arc B *c* en deux également: ainſi faut-il faire à l'égard des autres arcs. Pour diviſer le cercle en ſix, il ne faut que prendre avec le compas le demi-diametre: car l'appliquant ſix fois tout autour ſur la circonference, il la meſurera parfaitement: ainſi on peut enſuite diviſer le cercle en 12. & en 24. & en 48. *&c.*



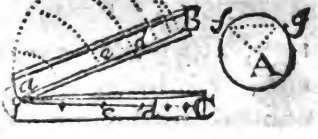
Digitized by Google

13. *Diviſer un cercle en cinq, en quinze, & en d'autres parties égales.* Cela ſe peut faire géometriquement en cette maniére, que je démontre dans l'Algebre. Faites un triangle rectangle, dont une jambe ſoit le demi-diametre du cercle, & l'autre la moitié du demi-diametre. De l'hypotenuſe de ce triangle oſtez la moitié du demi-diametre, ce qui reſtera ſera la corde de 36. d. & le coſté d'un décagone. En doublant cét arc, on aura l'arc de 72. d. qui eſt la cinquiéme partie du cercle; & la corde de ces 72. d. ſera l'hypotenuſe d'un triangle rectangle, dont une jambe eſt le demi-diametre, & l'autre le coſté du décagone. Or comme d'ailleurs on a auſſi trouvé 60. d. on aura encore la difference de 36. à 60. ſçavoir, 24. d. qui eſt la quinziéme partie du cercle. Mais pour la pratique, le plus court & le plus ſeûr, c'eſt de chercher avec le compas, à diverſes repriſes, une ouverture, qui eſtant appliquée cinq fois tout autour du cercle, le meſure préciſément: aprés cela chacune de ces parties ſe diviſera de meſme façon en trois, en cherchant avec le compas, & revenant quand on n'a pas bien trouvé juſté du premier coup: ainſi on aura le cercle diviſé en 15. Que ſi chacune de ces 15. parties ſe diviſe encore en qua-

Digitized by Google

tre, & chacune de ces quatre en ſix, on aura tout le cercle diviſé en 360. degrez. Et cette diviſion eſt tres-commode pour l'uſage. Remarquez qu'on n'a pas trouvé le moyen de diviſer geométriquement un arc en trois parties égales, ni en cinq, ni en ſept, ni en d'autres nombres impairs; je dis geométriquement, en n'employant que la ligne droite & le cercle.

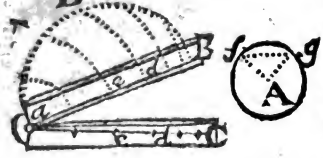
Cette diviſion du cercle en 360. degrez eſt encore plus utile, quand on ſçait ſe ſervir du Compas de proportion: *c'eſt une ſorte de compas qui a les branches plates,* a B, a C, *ſur leſquelles il y a diverſes lignes & diverſes diviſions, dont celles qui ſont le plus en uſage ſe réduiſent à deux: car ſur un coſté du compas il y a une ligne, en chaque branche* a e B, *&* a e C, *qui ſert à diviſer tout d'un coup un cercle en 360. & pour en prendre tout autant de degrez que l'on voudra. Cette diviſion du compas ſe fait de cette ſorte .....*



14. *Marquer un compas de proportion pour la diviſion du cercle.* Imaginez le demi-cercle *a* E D B, qui ſoit parfaitement diviſé en ſes 180. degrez; ſi du point *a* par chaque degré on tiroit des

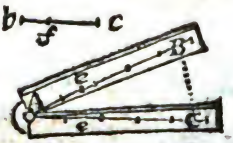
arcs qui coupaſſent la ligne *a e* B : par exemple, ſi du 60. degré E on tiroit l'arc E *e*, & ſi du 90. degré D on tiroit l'arc D *d*, *&c.* il faudroit marquer 60. dans la branche du compas, vis-à-vis de *e*, & 90. vis-à-vis de *d*, *&c.* Que ſi l'on en faiſoit autant dans l'autre branche *a* C, on auroit ce coſté du compas diviſé comme il faudroit.

15. *Expliquer l'uſage du compas de proportion pour diviſer le cercle.* Soit le cercle donné A *f*, prenez avec le compas ordinaire le demi-diametre A *f*, & puis appliquant une pointe de ce meſme compas ordinaire ſur le point *e*, c'eſt-à-dire, ſur le 60. degré d'une branche du compas de proportion, écartez ou approchez l'autre branche, en ſorte que l'autre pointe du compas ordinaire tombe préciſément ſur le point *e* de l'autre branche du compas de proportion, afin que la diſtance *e e* ſoit égale au demi-diametre A *f*; alors ſi vous voulez trouver tout d'un coup 90. degrez du cercle donné, mettez les deux points du compas ſur les deux points *d*, *d*, & tranſportez cette diſtance ſur *f g*, & vous aurez l'arc

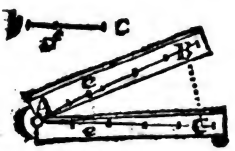


f g de 90. degrez. Que ſi vous vouliez prendre 35. degrez, vous n'auriez de meſme qu'à appliquer les pointes du compas ordinaire ſur les points des lignes *a* B, *a* C, dans leſquels eſt le 35. degré, & tranſporter cette diſtance ſur le cercle donné, & ainſi faudroit-il faire pour tout autre degré que ce ſoit. Tout cela eſt fondé ſur les propoſitions 42. 43. 49. 50. du *livre* ſixiéme : car comme tous les cercles ſont figures ſemblables, (6. 50.) la corde *f g* ſera au demi-diametre A *f* comme la corde *a* D au demi-diametre *e* D, c'eſt-à-dire, comme *a d* à *a e*. D'ailleurs les triangles *a d d* & *a e e* ſont ſemblables, & ainſi *d d. e e : : a d. a e*. Or *d d a* eſté fait égal à *f g*, & *e e* à A *f* : donc *f g*. A *f* : : *a d. a e*.

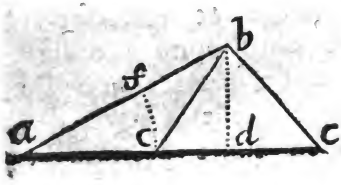
16. *Marquer le compas de proportion pour la diviſion des lignes droites.* Du centre du compas ſoient tirées deux lignes droites ſur les branches vers B & vers C, leſquelles ſoient diviſées chacune en 100. ou en 200. parties égales : & cela ſervira pour diviſer tout d'un coup une ligne donnée en autant de parties que l'on voudra. Par exemple, ſoit la ligne donnée *b c*, & qu'il en faille prendre 25 ;



c'eſt-à-dire, 25. nonante-ſeptiémes parties ; il faudroit pour cela diviſer toute la ligne *b c* en 97. parties égales, pour en prendre enſuite 25. ce qui ſeroit bien long à faire ; mais avec le compas de proportion on le fait fort aiſément. Prenez avec le compas ordinaire la longueur de la ligne *b c*, & appliquant une pointe ſur la quatre-vingt-dix-ſeptiéme partie B d'une branche du compas de proportion, approchez ou écartez l'autre branche, en ſorte que l'autre pointe tombe préciſément ſur la 97e partie C de l'autre branche ; alors mettez les deux pointes ſur la 25e partie *e e* de l'une & de l'autre branche, & tranſportez la diſtance *e e* ſur *b f*, & *b f* ſera juſtement $\frac{25}{97}$ de toute la ligne *b c* : ce qui eſt auſſi fondé ſur ce que les triangles A B C & A *e c* ſont ſemblables.



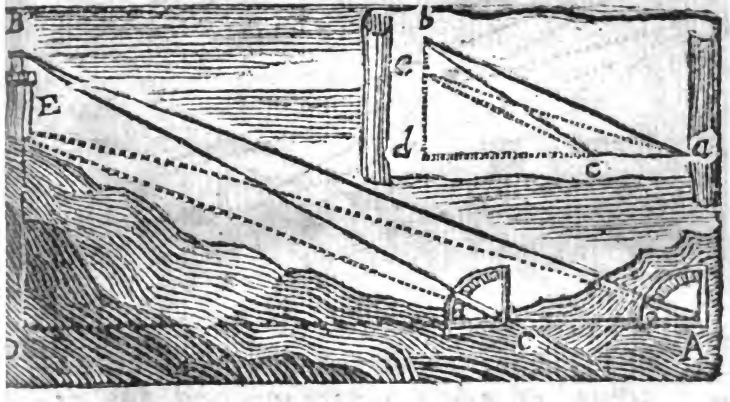
17. *Sur une ligne donnée faire un angle de tant de degrez que l'on voudra.* Soit la ligne donnée *a c*, & qu'il faille y faire un angle de 30. degrez. Du point



a,

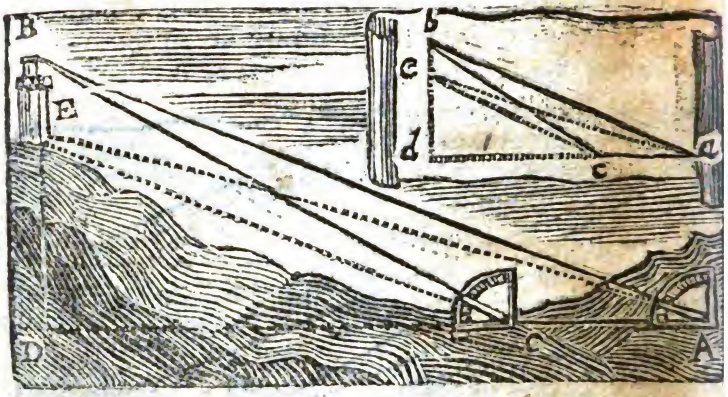
a, comme du centre, faites un cercle *c f*, dans lequel vous prendrez avec le compas de proportion, ou autrement, 30. degrez depuis *c* juſqu'à *f*, & par ce 30. degré vous tirerez la ligne *a f*, qui avec la ligne *a c* fera un angle de 30. d.

18. *Connoiſſant les angles d'un triangle, & un coſté, trouver les autres coſtez.* On vous dit qu'il y a un triangle dans le monde, dont la baſe A C a dix toiſes, & les deux angles d'autour de la baſe ſont l'un A C B de 150. degrez, & l'au-



tre C A B de 20. (& par conſequent le troiſiéme angle vers la pointe ſera de 10. afin que tous trois 150. 20. 10. enſemble faſſent 180. c'eſt-à-dire, deux droits) & on vous demande combien de toiſes doit avoir chacun des deux autres coſtez A B, C B. Faites ſur du papier, ou plû-

toſt ſur du carton fin, un triangle ſemblable *a c b*, en cette ſorte: prenez une baſe à diſcretion *a c* de 10. pouces, ou de dix autres parties telles qu'il vous plaira: ſur *c a* faites deux angles, l'un *c a b* de 20. degrez, & l'autre *a c b* de 150. degrez, (9. 17.) les deux lignes *a b*, *c b* ſe croiſeront en quelque part, ſçavoir en *b*. Meſurez donc combien de pouces il y a dans



a b ou dans *c b*: car vous ſerez aſſeûré que tout autant de pouces que vous aurez trouvé en *a b*, il y aura auſſi tout autant de toiſes dans A B; & de meſme dans C B, autant que dans *c b*. Car puiſque les triangles ſont ſemblables ayant les angles égaux, *a c* ſera à *a b* :: comme A C à A B.

19. *Meſurer les diſtances, les hauteurs, les profondeurs, & généralement toutes les grandeurs des lieux éloignez & inac-*

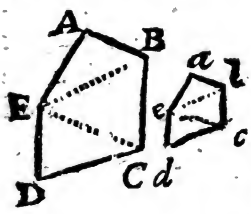
ceſſibles. Si au haut d'une montagne qui paroiſt de loin il y a une tour B E, & qu'on veuille en obſerver la diſtance & la hauteur ; il faut avec quelque ſorte d'inſtrument, (comme eſt un Quart-de-nonante, c'eſt-à-dire, un quart de cercle diviſé en 90. degrez garni d'une regle qui roule autour du centre, laquelle s'appelle *Alidade*) il faut, dis-je, avec cét inſtrument prendre deux angles de deux divers endroits en cette maniere. Si vous eſtes en A, placez l'inſtrument en telle ſorte qu'un coſté réponde juſtement à la ligne horizontale A D, ſans hauſſer, ni baiſſer de part ou d'autre : mettez l'œil en A, c'eſt-à-dire, vers le centre de l'inſtrument, & tournez la regle en telle ſorte qu'elle ſoit dirigée vers la pointe de la tour B ; ſi-bien que cette regle raſe ainſi voſtre rayon viſuel, par lequel vous regardez la pointe B ; alors cette regle vous marquera dans la circonference, de combien de degrez eſt l'angle B A D : car les degrez ſont marquez dans cette circonference de l'inſtrument. Aprés cela changez de place, & dans un lieu bien plein & uni avancez-vous de 10. toiſes (ou de telle autre diſtance qu'il vous plaira) juſqu'à C, & là, prenez derechef un autre angle B C D, par le moyen duquel vous aurez l'angle

de ſuite B C A, puiſque ces deux enſemble ſont égaux à deux droits : ainſi dans le triangle A C B vous connoiſſez la baſe que vous avez priſe de 10. toiſes : vous connoiſſez encore les deux angles qui ſont ſur la baſe ; & par conſequent vous avez de quoy connoiſtre le coſté C B, ou le coſté A B. (9. 18.) Vous connoiſtrez encore la hauteur B D, ou la diſtance A D, ſi dans le petit triangle ſemblable vous tirez du point *b* une perpendiculaire *b d* ; car B D ou A D auront autant de toiſes que *b d*, ou *a d* auront de pouces. Que ſi aprés avoir pris la hauteur B D, on prend encore par la meſme methode la hauteur E D, on aura auſſi la grandeur B E depuis le haut juſques au bas de la tour.

Quelquefois au lieu d'avancer vers la tour, & de faire les obſervations de haut en bas, ou des angles que font les lignes viſuelles avec la ligne horizontale ; il eſt bon de faire les deux ſtations à coſté l'une de l'autre : mais cela revient toûjours au meſme, & la pratique n'en eſt point au fond differente. L'on voit bien auſſi que par ce moyen on peut meſurer toutes les grandeurs imaginables, pourveû qu'on en puiſſe obſerver les extrémitez de deux endroits differens. On ne s'arreſte pas icy à décrire les pratiques particulieres, ni les avantages que l'on re-

tire des lunettes que l'on a trouvé le moyen de mettre à l'Alidade de l'instrument, qui est une commodité inestimable.

20. *Prendre le plan d'une Place.* Soit une Ville ou autre Place A B C D E, & qu'on vous ordonne d'en prendre le plan, & d'en faire la figure ; prenez toutes les distances des costez & des lignes tirées d'angle à angle, & rapportez-les à proportion dans une figure sur du papier : par exemple, ayant trouvé qu'A B est de 30. toises, B C de 59. C D de 50. B E de 67. A E de 49. *&c.* aprés avoir fait une échelle sur du papier, divisée en 100. petites parties, faites une ligne *a b* de 30. parties, *b e* de 67. *a e* de 49. ces lignes jointes ensemble font le triangle *a b e* tout semblable au triangle A B E, & continuant ainsi à faire *b e c* semblable à B E C, *&c.* vous aurez une figure totale *a b c d e* semblable à la place A B C D E.



21. Que si on ne peut pas entrer dans la place, ou la percer pour mesurer la distance des angles B E, F C, il faut prendre les angles de la place, & les rapporter sur la figure, en sorte que si l'angle B A E est de 66. degrez, l'angle *b a e* soit aussi de 66. degrez : ainsi des autres.

22. *Faire la carte d'une Ville ou d'un Païs.* Montez ſur deux lieux élevez A & B, d'où l'on puiſſe découvrir la Ville ou le Païs dont vous voulez faire la carte : ayez un quart de 90. ou un cercle tout entier, ou bien un demi-cercle ſeulement diviſé par degrez avec ſon alidade au centre ; placez premierement l'inſtrument ſur A, en ſorte qu'un de ſes coſtez réponde d'A vers B : l'inſtrument eſtant ainſi

placé & affermi, regardez les clochers, les maiſons extraordinaires, ou les montagnes, & autres endroits conſiderables, comme E, D, C, *&c.* & prenez tous ces angles avec l'alidade, & écrivez tout cela pour vous en ſouvenir ; l'angle C A B, par exemple, eſt de 50. degrez 30'. l'angle D A B de 45. degrez 8'. *&c.* puis faites-en autant de deſſus B. & écrivez, l'angle A B C

eſt de 40. d. 10′. l'angle A B D de 47. d. 28′. *&c.* Aprés quoy prenez ſur du papier une ligne à diſcretion *a b*, & faites des angles égaux à ceux que vous avez trouvez : *c a b* égal à C A B, *d a b* égal à D A B, *a b c* à A B C, *&c.* & ainſi vous aurez les points *c, d, e, &c.* qui ſeront dans la meſme diſpoſition que les clochers ou les autres endroits conſiderables, C, D, E, *&c.* Or ayant une fois ces endroits principaux, tout le reſte ſe peut tracer à veûë d'œil. Pour faire une operation plus juſte, il eſt bon de prendre les angles encore d'un troiſiéme lieu, & meſme d'un quatriéme ; afin que tout s'accordant, on ſçache que l'operation eſt bien faite.

23. *Connoiſſant deux coſtez d'un triangle, & l'angle d'entre deux, trouver le troiſiéme coſté & les deux autres angles.....*

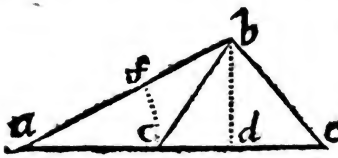
24. *Connoiſſant deux coſtez & un angle oppoſé à un de ces coſtez, connoiſtre le troiſiéme coſté & les deux autres angles :* pourveû qu'on ſçache ſi l'angle qu'on cherche eſt aigu ou obtus.....

25. *Connoiſſant les angles & un coſté, connoiſtre les autres coſtez.....*

26. *Connoiſſant les trois coſtez, connoiſtre tous les angles.* Tout cela ſe trouve parfaitement, en faiſant des triangles ſemblables ſur du carton fin.

27. *Meſurer* l'aire, (*c'eſt-à-dire, la*

grandeur ou la capacité interieure) d'un triangle donné a b c. Du ſommet *b* tirez la perpendiculaire *b d* ſur la baſe *a c* prolongée, s'il en eſt beſoin ; diviſez *a c* en 10. (ou en tant d'autres parties qu'il vous plaira) & voyez combien de ces parties ſont contenuës dans *b d* : car en multipliant la moitié de *b d* par 10. vous aurez l'aire du triangle, (3. 18.) Comme ſi *b d* contient 12. parties de celles dont *a c* en contient 10. il faut multiplier 6. par 10. pour avoir 60. qui eſt la grandeur du triangle *a b c*, c'eſt-à-dire, que ce triangle contient autant d'eſpace qu'en contiendroient 60. petits quarrez, dont le coſté de chacun ſeroit la dixiéme partie de *a c*.



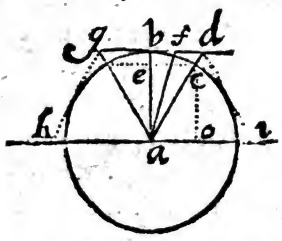
Ayant égard à la pratique, il n'y a point de methode plus facile, ni meſme plus exacte, que celle-cy : mais en de certains cas, il eſt bon de ſçavoir meſurer ces choſes avec une certaine préciſion qui ne peut ſe trouver que par le moyen du calcul. Voicy donc les principes d'où l'on tire tout l'artifice du calcul.

28. *Dans un triangle rectangle* a b d, *connoiſſant deux coſtez, connoiſtre le troiſiéme coſté par le calcul.* Soit la jambe *b d* de 3. toiſes, & la jambe *a d* de 4. toiſes ; mul-

tipliez 3. par 3. & 4. par 4. pour faire les deux quarrez 9. & 16. ces deux quarrez joints enſemble ſeront égaux au quarré de l'hypotenuſe *a b*: (6. 61.) & par conſequent je voy que le quarré de *a b* eſt 9. plus 16. c'eſt-à-dire 25. ainſi pour ſçavoir la grandeur de *a b*, je n'ay qu'à prendre le coſté ou la racine quarrée de 25. qui eſt 5. d'où je conclus que *a b* eſt de 5. toiſes. Si l'hypotenuſe *a b* 5. eſt connuë avec une jambe *a d* 4. il faut ſouſtraire le quarré 16. du quarré 25. & il reſtera 9. dont la racine 3. eſt la grandeur de l'autre jambe *b d*. Quelquefois il arrive que les deux quarrez des jambes joints enſemble ne font pas un nombre quarré, ou que le quarré d'une jambe ſouſtrait du quarré de l'hypotenuſe ne laiſſe pas un nombre quarré: comme ſi les jambes ſont 2. & 3. leurs quarrez ſeront 4. & 9. qui joints enſemble font 13. Or 13. n'eſt point nombre quarré, & par conſequent n'a point de racine préciſe: mais néanmoins il y a des nombres qui en approchent, comme icy $3\frac{3}{5}$ eſt à peu prés la racine de 13. car $3\frac{3}{15}$ multiplié par ſoy-meſme, fait 13. moins $\frac{1}{25}$: ainſi le coſté *a b* eſt de $3\frac{3}{5}$, & d'un peu davantage.

On ne donne pas la methode d'extraire ces racines quarrées, parce que c'eſt une regle d'Arithmetique, de quoy on ne traite pas icy.

29. *Calculer la Tangente, la Secante, & le Sinus de 30. degrez.* Soit, par exemple, *b a* le rayon ou ſinus total, *a d* la ſecante de 30. degrez, *b d* la tangente, *c e* le ſinus; il eſt aiſé de voir que *b d* eſt la moitié de *a d*: car en tirant *a g* une autre ſecante de 30. degrez, le triangle *g a d* ſera équilateral: car chacun des angles *g*, *d*, & *g a d* ſera de 60. degrez: ainſi *b d* eſtant la moitié de *d g*, elle ſera auſſi la moitié de *a d*: par meſme raiſon *c e* ſera la moitié de *a c*. Suppoſant donc dans le triangle rectangle *a e c*, que l'hypotenuſe *a c* eſt de 2. & la jambe *e c* d'1. & oſtant le quarré 1. du quarré 4. nous aurons 3. égal au quarré du coſté *a e*, égal à *c o*. (qui eſt le ſinus de l'arc *c i* de 60. degrez.) Mais ſi au lieu de prendre 2. & 1. pour *a c*, & *c e*, nous prenons 1, 000, 000 & 500, 000, le quarré de *c e*, ſçavoir 250, 000, 000, 000 oſté du quarré 1, 000, 000, 000, 000, laiſſera 750, 000, 000, 000, dont la racine à peu prés eſt 866, 025. pour *a e*, ou *c o* ſinus de 60. degrez.

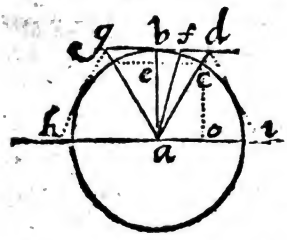


30. *Connoiſſant* c e, *le ſinus d'un angle quelconque, connoiſtre* c o, *le ſinus du* complement *de cét angle. Le complement* d'un angle eſt celuy qui reſte pour faire 90. degrez. Par exemple, ayant l'angle *c a b* de 30. degrez, ſon complement eſt *c a i* de 60. degrez; car 60. auec 30. font 90. d. Cette propoſition eſt démontrée dans la précedente.

31. *Connoiſſant* e c *le ſinus d'un angle, & le ſinus de ſon complement, ſçavoir* c o *ou* a e; *connoiſtre la tangeante* b d, *& la ſecante* a d. Comme les triangles *a e c* & *a b d* ſont ſemblables, il s'enſuit que *a e. e c :: a b. b d :: &* *a e. a c :: a b. a d :: &* ainſi par la regle-de-trois d'Arithmetique, on trouve que l'arc *c b* eſtant de 30. degrez, la tangente *b d* eſt de 577, 350. & la ſecante *a d* de 1, 154, 700.

32. *Connoiſſant le ſinus, la tangente & la ſecante d'un arc quelconque* b c; *trouver le ſinus, la tangente & la ſecante de la moitié de cét arc.* Tirant *a f* par le milieu de l'arc *b c*, on aura *d f. f b :: a d. a b.* (6. 72.) & par conſequent on trouvera la tangente *b f* de 15. degrez, & enſuite le ſinus & la ſecante des meſmes 15. degrez: aprés quoy encore, partageant derechef en deux l'arc *b f*, on trouvera le ſinus, la tangente & la ſecante de 7. degrez 30'. & puis de 3. d. 45'. & ainſi à l'infini.

33. *Trouver le ſinus* c e *de 45. degrez.* Il eſt égal au ſinus du complement des meſmes 45. degrez, ſçavoir à *e a*, & par conſequent on trouve encore la tangente & la ſecante de 45. degrez auſſi-bien que des moitiez 22. degrez 30′. 11. degrez 15′. *&c.*



34. *Trouver le ſinus de 36. d.* Ayant inſcrit un pentagone régulier dans le cercle, on ſçait la proportion qu'a le coſté de ce pentagone avec le rayon. (9. 13.) Or ce coſté eſt la corde de 72. degrez, & la moitié de cette corde eſt le ſinus de la moitié de 72. ſçavoir de 36. Ainſi le ſinus de 36. d. eſt connu, & par conſequent auſſi la tangente & la ſecante auſſi-bien que des moitiez 18. degrez, 9. degrez, 4. degrez 30′. 2. d. 15′. *&c.*

35. *Trouver le ſinus, la tangente, & la ſecante de 12. degrez, & des moitiez 6. degrez, 3. degrez, 1. degré 30′. 45′. &c.* Puis qu'on connoiſt la corde de 24. degrez, qui eſt le coſté d'un polygone régulier de 15. coſtez. (9. 13.) on connoiſtra, *&c.*

36. Combinant ainſi toutes ces choſes, on aura les ſinus, tangentes & ſecantes des angles de 45′. d'1 degré 30′. de 2. de-

grez 15′. de 3. degrez 45′. de 4. 30′. ainſi de tous les autres de 45′. en 45′.

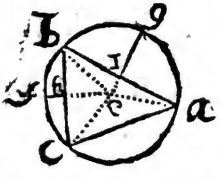
37. *Trouver les ſinus de tous les arcs qui ſont entre deux de ces arcs ainſi trouvez de* 45′. en 45′. Il faut faire une regle de proportion. Par exemple, le ſinus de 45′. eſtant 1308. le ſinus de 1′. ſera 29. parce que 45. 1′ : : 1308. 29. de meſme, le ſinus de 20. ſera 581. De meſme, pour avoir le ſinus de 3. degrez 30′. ayant le ſinus de 3. degrez 5233. (9. 35.) & puis le ſinus de 3. degrez 45′. 6540. (9. 32.) on trouve que ces 45′. qui ſont depuis 3. degrez juſques à 3. degrez 45′. portent 1307. d'augmentation de ſinus : car 5233. ſinus de 3. degrez, oſtez de 6540. ſinus de 3. degrez 45′. laiſſent 1307. Voulant donc trouver le ſinus de 3. degrez 30′. je dis ainſi : Si 45′. qui ſont depuis 3. degrez juſqu'à 3. degrez 45′. portent 1307. d'augmentation dans le ſinus, combien d'augmentation porteront 30′. qui ſont depuis 3. degrez juſques à 3. degrez 30′. & je trouve 871. il faut donc ajouſter 871. à 5233. & on aura 6104. pour ſinus de 3. degrez 30′. ainſi de tous les autres.

Par ce moyen on peut faire des tables où ſoient les ſinus, les tangentes & les ſecantes de tous les angles de minute en minute depuis 0. *juſqu'à* 90. *degrez.*

Remarquez que par cette derniere regle

on ne trouve pas à la rigueur le ſinus juſte, parce que les ſinus n'augmentent pas à meſme proportion que les arcs : mais ce defaut eſt icy ſi petit, qu'on ne doit pas ſe mettre en peine d'une plus exacte préciſion.

38. Par le moyen de ces tables on calcule les triangles, parce qu'on eſt aſſeûré que dans tout triangle, les coſtez ſont entre eux comme les ſinus des angles oppoſez : par ex. dans le triangle *a b c*, tirant le cercle circonſcrit du centre *e*, les perpendiculaires *e i*, *e h*, partageront en deux également les coſtez *a b* & *b c*. (4. 6.) ainſi *a b. b c :: a i. b h*. Or *a i* eſt le ſinus de l'angle *a e i* ou *a c b*, qui (4. 13.) luy eſt égal, & de meſme *b h* eſt le ſinus de l'angle *b e h* ou *b a c :* donc, *&c.*



39. Et ſur ce principe, *connoiſſant deux angles & un coſté, ou deux coſtez & un angle, trouver tout le reſte.* Faites par une regle de proportion, comme un coſté connu au ſinus de l'angle oppoſé connu ; ainſi l'autre coſté connu a un quatriéme nombre qui ſera le ſinus de l'angle oppoſé à cét autre coſté. Ou bien ſi deux angles ſont connus avec un coſté, il faut faire comme le ſinus d'un angle connu au coſté oppoſé

Digitized by Google

à ce meſme angle : ainſi le ſinus de l'autre angle connu à un quatriéme nombre, qui ſera le coſté oppoſé à cét autre angle ; *&c.*

40. Ces operations ſont beaucoup abregées par les logarithmes : car on a eû ſoin de mettre dans les tables, non ſeulement les ſinus & les tangentes, mais auſſi leurs logarithmes, qui leur répondent vis-à-vis. De ſorte qu'au lieu des multiplications & des diviſions qu'il faudroit faire avec une peine inſupportable, en ſe ſervant des ſinus & des tangentes, il ne faut que faire des additions ou des ſouſtractions, en employant les logarithmes: comme ſi dans le triangle A B C, (9. 18.) dont le coſté A C eſt connu de 10. toiſes, l'angle A B C de 10. degrez, l'angle C A B de 20. on demande le coſté B C, il faudroit dire comme le ſinus de l'angle B, (qui eſt dans les tables 17364.) au coſté A C, qui eſt connu de 10. toiſes : ainſi le ſinus de l'angle A (qui eſt dans les tables 34202.) eſt au coſté qu'on cherche C B. Pour trouver ce quatriéme C B par une regle-de-trois, il faudroit multiplier le ſecond terme 10. par le troiſiéme 34202. & diviſer le produit 342020. par le premier 17364. ce qui eſt bien long. Mais ſi au lieu de ces nombres nous prenons leurs logarithmes, ajoûtant le logarithme de 20. degrez au loga-

Sin.angl.A.20.d.	9. 5340517.
AC. 10. toiſes.	1. 0000000.
Somme.	10. 5340517.
Sin.angl.B.10.d.	9. 2396702.
Reſte, qui eſt CB. 19. $\frac{7}{10}$ toiſes.	1. 2943815.

rithme de 10. toiſes, & de la ſomme oſtant le logarithme de 10. degrez, il reſte le logarithme 1. 2943. *&c.* qui dans la table répond entre 19. & 20. de ſorte que le coſté CB doit eſtre de prés de 20. toiſes.

Les livres qui traitent des ſinus & des logarithmes expliquent cecy plus en particulier. Je croy pourtant en avoir dit autant qu'il en faut ſçavoir pour pouvoir trouver de ſoy-meſme toutes ces choſes. On ajouſtera quelques autres propoſitions ſur ce ſujet dans la ſuite de cette Geométrie.

41. *Trouver une ligne droite, qui ſoit égale à la circonference d'un cercle à ſi peu prés que l'on voudra:* prenant douze fois la tangente de 30. degrez qui eſt *b d*, & rangeant ces 12. tangentes au tour du cercle, en ſorte qu'elles ſoient jointes deux à deux en ligne droite, comme on voit en la

figure de l'art. 27. où *d g* ſont deux tangentes oppoſées, chacune de 30. degrez, & de meſme *g h*, & *d i*, *&c.* On fera ainſi un polygone circonſcrit de 6. coſtez, dont la circonference eſt plus grande que celle du cercle. (4. 27.) Que ſi on prend douze fois le ſinus *c e*, on fera un polygone inſcrit de 6. coſtez, dont la circonference eſt plus petite que celle du cercle. De ſorte que donnant au rayon *a b*, 1, 000, 000; *b d*, qui eſt 577, 350 pris douze fois, c'eſt-à-dire, 6, 928, 200. eſt plus grand que la circonference du cercle, & *e c* 500, 000 pris douze fois, ſçavoir, 6, 000, 000, eſt plus petit que la circonference du meſme cercle.

42. Mais ſi au lieu de prendre douze fois la tangente & le ſinus de 30. degrez, l'on prend 360. fois la tangente & le ſinus d'un degré, ſçavoir 17455. & 17452. on fera deux polygones, l'un circonſcrit 6, 283, 800 plus grand, & l'autre inſcrit 6. 282, 720 plus petit que le cercle.

43. Enfin donnant au rayon 100, 000, 000, 000, & prenant la tangente & le ſinus d'une minute 21600 fois (car il y a autant de minutes dans un cercle) on aura 628, 318, 512, 000 plus petit, (car le ſinus d'1'. eſt 29, 088, 820.) & 628, 318, 533, 600 plus grand. (car la tangente d'1'. eſt 29, 088, 821.) Que ſi ces trois nom-

fait 3141000. pour toute l'aire du cercle : (4.31.) mais si le demi-diametre est de quelque autre mesure, par exemple de 9. pouces, il faut faire 1000. 3141 : : 9. 16 $\frac{269}{1000}$, & puis multiplier ce dernier nombre (qui doit estre la demicirconference) par 9. (qui est le demidiametre) & on a 17 $\frac{421}{1000}$ pour l'aire du cercle.

Il est plus commode, ce me semble, de se servir de cette proportion de 1000. *à* 3141. *que de celle dont on se sert communément de* 7. *à* 22. perpendiculaire.

46. *Mesurer la grandeur d'un parallelepipede ou d'un cylindre.* Multipliez sa base par sa hauteur perpendiculaire.

47. *Mesurer une pyramide ou un cone.* Multipliez la troisiéme partie de sa base par sa hauteur.

48. *Mesurer une sphere.* Multipliez la troisiéme partie de sa surface par le demidiametre, ou bien les deux tiers de son plus grand cercle par son diametre.

FIN.

Digitized by Google

TABLE

DES MOTS EXPLIQUEZ en cette Geométrie.

Le premier chifre ſignifie le livre, & les autres, l'article.

Aire, capacité ou grandeur d'une figure. 9. 25
Alternando, invertendo, &c. 6. 9. 8
Amblygone, ou obtuſangle. 2. 5
Angles alternes, internes. 1. 30
Angle droit, obtus, aigu. 1. 17
Angles externes du triangle. 2. 10
Angles oppoſez, de ſuite. 1. 17
Angle rectiligne, curviligne, mixte. 1. 6
Angle ſoûtenu, ou ſoûtendu, ou oppoſé. 2 17
Arc. 1. 11

C

Cercle. 1. 10
Circonference. 1. 10
Commenſurables. 7. 4
Commenſurable en puiſſance. 7. 33
Compas de proportion. 9. 14
Complemens dans le parallelogramme. 3. 12
Complement d'un angle. 9. 30
Congruës figures. 2. 12
Converſe propoſition. 1. 33

Digitized by Google

Convertendo, Componendo, &c. 6. 11. 12. &c.
Corps ou ſolide. 1. 4
Coſtez ou racines des nombres. 7. 10
Cubique nombre. 7. 39

D

Degrez de progreſſion. 8. 18
Degrez, minutes, ſecondes. 1. 24
Diagonale, diametre, ligne tirée d'angle à angle dans les parallelogrammes. 3. 7
Diametre. 1. 12. & 3. 7

E

Equilateral. 2. 7
Equimultiple. 6 15
Ex æquo, *proportion.* 6. 13. 14

G

Geométrique progreſſion. 8. 8
Gnomon ou eſquierre. 3. 12
Grandeur. 6. 1

H

Harmonique progreſſion. 8. 32
Homologues coſtez. 6. 31
Hypotenuſe, grand coſté du triangle rectangle. 6. 61

I

Jambes, coſtez autour de l'angle droit d'un triangle. 6. 61
Incommenſurables. 7. 5
Invertendo, alternando, &c. 6. 8. 9. &c.
Iſoperimetres. 4. 32. à la fin.
Iſoſcele, triangle à deux jambes égales. 2. 7

L

Logarithmes. 8. 16

Digitized by Google

M

MEſurer. 7. 1
Minutes, degrez. 1. 24
Multiplier une ligne par une autre ligne, ou par une ſurface. 6. 17. 18

N

NOmbre plan. 7. 9. *Solide.* 7. 37
Nombres plans ſemblables. 7. 14
Nombre quarré. 7. 12. *Cubique.* 7. 39

O

OBlique, ligne. 1. 15
Oxygone ou acutangle. 2. 5

P

PAralleles. 1. 26
Parallelogramme. 3. 2
Parallelogrammes d'autour du diametre. 3. 12
Partie. 7. 2. *Parties.* 7. 3
Perpendiculaire. 1. 15
Plan ou ſurface plane. 1. 5
Pouvoir: une ligne peut deux fois une autre. 7. 32
Problêmes, Theorêmes. 9. 1
Progreſſion Arithmetique. 8. 2. *Geométrique.* 8. 8. *Harmonique.* 8. 32
Progreſſion des quarrez, des cubes, &c. 8. 34
Proportion. 6. 6
Puiſſance premiere. 7. 32. *Seconde.* 7. 35

Q

QVadrilatere, figure à quatre coſtez. 3. 1
Quantité. 1. 1
Quarré-quarré, ſurſolide, &c. 8. 10

Digitized by Google

TABLE

R

Racines ou coſtez des nombres. 7. 18
Raiſon. 6. 2
Raiſon compoſée. 6. 26
Raiſon doublée. 6. 29. 30. *Triplée.* 6. 36
Raiſon égale ou proportion. 6. 4. 6
Raiſon plus grande. 6. 5
Rayon ou demi-diametre. 1. 13. ou *Sinus total.* 4. 9
Réciproques. 6. 65
Rectangle ſimplement pour parallelogramme rectangle. 3. 3
Rhombe, Lozange. 3. 4
Rhomboïde, Lozange irrégulier. 3. 5

S

Scalene, triangle à trois coſtez inégaux. 2. 7. *Cone ou cylindre ou parallelepipede.* 5. 12
Secante, tangente, ſinus. 4. 9
Semblables triangles. 6. 44. *Rectangle.* 6. 30
Solides. 6. 54. *Figures.* 6. 48. 49
Sinus, tangente, ſecante. 4. 9
Sinus du complement. 9. 28
Solide corps. 1. 4. *Angle ſolide.* 5. 4
Surface plane ou plan. 1. 4
Surſolide quarré, cube, &c. 8. 10

T

Tangente, ſinus, ſecante. 4. 9
Termes de progreſſion. 8. 1
Theorêmes, problêmes. 9. 1
Trapeze, quadrilatere irrégulier. 3. 5

Digitized by Google

EXTRAIT DU PRIVILEGE du Roy.

PAR Lettres Patentes du Roy, données à Saint Germain en Laye le 31. jour de Mars 1680. ſignées LE PETIT, & ſcellées du grand Sceau de cire jaune, il eſt permis à SEBASTIEN MABRE-CRAMOISY, Imprimeur ordinaire de Sa Majeſté, de rimprimer en telle forme, de tel caractere, & autant de fois qu'il voudra, *Tous les Traitez de Mathematique du P. Ignace Gaſton Pardies,* & ce pendant le temps & eſpace de dix années conſecutives, à compter du jour que chacun deſdits Traitez aura eſté imprimé pour la premiere fois en vertu deſdites Lettres. Avec défenſes à toutes perſonnes, de quelque qualité ou condition qu'elles ſoient, d'imprimer, ou faire imprimer leſdits Traitez, ſous les peines portées par leſdites Lettres.

Regiſtré ſur le Livre des Libraires & Imprimeurs de Paris le 27. Avril 1683. Signé, C. ANGOT, Sindic.

La Geometrie a eſté achevée d'imprimer pour la premiere fois en vertu du Privilege cy-deſſus le 25. Juin 1683.

Digitized by Google